

Tarea 5

Relatividad Avanzada

4 de Septiembre del 2007

1. Cálculos detallados de *los ejemplos* de la sección 2.2 (pags 33 a 36) de **A relativistic Toolkit** de *E. Poisson*.

2. Considere una onda gravitacional sobre un fondo plano representado por

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} f(z - t) \quad (1)$$

donde $f(z - t)$ es una función que solo tiene valores diferentes de cero en cierta región, y γ_{ab} está dada mediante

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Calcule la expansión, el *shear* y el *twist* de las geodésicas asociadas con $\partial/\partial t$ (**Nota:** este vector está definido *antes* de que pase la onda)

3. Demostrar las siguientes condiciones sobre la forma del tensor de energía-momento

- *Condición débil, WEC* $\iff \rho \geq 0$ y $\rho + P_i \geq 0$ para $i = \{1, 2, 3\}$.
- *Condición fuerte, SEC* $\iff \rho + \sum P_i \geq 0$ y $\rho + P_i \geq 0$ para $i = \{1, 2, 3\}$.
- *Condición dominante, DEC* $\iff \rho \geq |P_i|$ para $i = \{1, 2, 3\}$.
- *Condición nula, NEC* *iff* $\rho + P_i \geq 0$ para $i = \{1, 2, 3\}$.

4. Demostrar que $n^a(\tau)$ se puede escribir como $n^a(\tau) = n_{PP}^a(\tau) - l^a(\tau)$ donde n_{PP}^a es propagado paralelamente y l^a es ortogonal a k^a .

5. Demostrar que la relación \sim del espacio vectorial $V_p = \{v^a \in T_p(M) \mid v^a k_a = 0\}$, definida mediante $v^a \sim w^a \iff v^a - w^a \propto k^a$

6. Consideremos el espacio de clases de equivalencia $V_p^\square = V_p / \sim$ y las operaciones \oplus, \otimes definidas mediante

$$[v^a] \oplus [w^a] \equiv [v^a + w^a], \quad \alpha \otimes [v^a] \equiv [\alpha v^a], \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

- a) Demostrar que las operaciones están bien definidas.
 - b) Demostrar que $(V_p^{\square}, \oplus, \otimes)$ es un espacio vectorial sobre \mathbf{R} .
 - c) Demostrar que la proyección $\Pi : V_p \rightarrow V_p^{\square}$ dada por $\Pi(v^a) \equiv [v^a]$ está bien definida.
7. Completar los pasos faltantes de la demostración del Lema 9.2.2 del Wald.
8. Demostrar la última proposición de las notas del 4/09/2007 (Disponibles en el sitio).