

# Clase 9

Formulación de valores  
iniciales.

# Caso de la Teoría de Maxwell.

- Las ecuaciones de Maxwell en el vacío en un espacio de Minkowski son:

$$\nabla_a F^{ab} = 0 \quad \text{con} \quad F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$$

- En coordenadas Minkoskianas

$$\partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = 0 \quad *$$

la cual no tiene la forma de las ecuaciones consideradas con antelación. De hecho sabemos que estas ecuaciones no pueden tener una formulación de valores iniciales en el sentido de los casos anteriores:

Consideremos un solución  $A_b$  de la ecuación  $*$  con datos iniciales dados  $A_b^{(0)}$ ,  $(\partial A_b / \partial t)^{(0)}$  en una hipersuperficie  $t=0$ .

- Sea  $\chi$  una función suave cualquiera que es idénticamente cero para  $t < \epsilon$  ( para algún  $\epsilon > 0$ ).
- Entonces  $A_b' = A_b + \partial_b \chi$  es solución de la ecuación con los mismos valores iniciales.
- Esta situación que, en el caso de la Teoría de Maxwell y como veremos en el caso de la Relatividad General tiene una solución perfectamente adecuada representa un potencial problema para muchas teorías de campos vectoriales o tensoriales que parecen superficialmente razonables.
- Volviendo a la teoría de Maxwell consideremos la componente 0 ( en coordenadas Minkowskianas) de la ecuación \*
- Esta es:  $0 = \partial^a (\partial_a A_0 - \partial_0 A_a) = \partial^0 (\partial_0 A_0 - \partial_0 A_0)$   
 $+ \sum_i \partial^i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = \nabla^2 A_0 - \nabla^i (\partial_0 A_i)$
- Que no tiene derivadas temporales de  $A_0$ . De hecho definiendo el campo eléctrico como  $E_i = \nabla_i A_0 - \partial A_i / \partial t$ , la ecuación anterior es simplemente  $\nabla^i E_i = 0$ .

- [En notación de índices abstractos el campo eléctrico asociado con la superficie especial  $\Sigma$ , esta dado por  $E_a = F_{ab} n^b$  donde  $n^b$  es el vector unitario normal a  $\Sigma$ , análogamente el campo magnético asociado a  $\Sigma$  esta definido como  $B_a = \epsilon_{abcd} F^{cd} n^b$  donde  $\epsilon_{abcd}$  es el elemento de volumen natural ( es decir asociado con la métrica) del espacio tiempo.]
- El punto es que la ecuación  $\nabla^i E_i = 0$ , representa no una ecuación de evolución, sino una limitante ( ligadura o “constraint”) sobre los valores iniciales aceptables ( $A_b^{(0)}, (\partial A_b / \partial t)^{(0)}$ ).
- Las dos observaciones anteriores: La existencia de ligaduras y la indeterminación de la solución de manera univoca en base las ecuaciones de evolución y a los datos iniciales son características de teorías que poseen invariancias de Norma. Esta situación corresponde a aquella en que una misma situación física se puede representar en una multiplicidad de formas diferentes, ligadas entre si, por un tipo de transformación bien definida de las variables: transformaciones de Norma, que en nuestro caso es justamente  $A_b' = A_b + \partial_b \chi$ ).

La resolución de la problemática expuesta, se da entonces en el sentido de que los datos iniciales determinaran la solución de manera única salvo una transformación de norma. **Veamos como se da esto:**

1) Consideramos la hipersuperficie  $\Sigma$  unos datos iniciales dados

$$(A_b^{(0)}, (\partial A_b / \partial t)^{(0)}) \text{ que satisfacen la ligadura: } \nabla_i (\nabla_i A_0 - \partial A_i / \partial t) = 0.$$

2) Hacemos una transformación de norma de estos datos llevándolos a satisfacer en  $\Sigma$  la norma de Lorentz  $\partial^a A_a = 0$ . Para hacer esto definimos

$f = -\partial A_0^{(0)} / \partial t + \partial A_i^{(0)} / \partial x^i$  en  $\Sigma$ . Construimos en un entorno de  $\Sigma$  una función  $\chi$  tal que  $\partial^b \partial_b \chi = -f$  en  $\Sigma$ , y de resto arbitraria ( que existe por el teorema 10.1.2).

Definimos los nuevos datos en  $\Sigma$  entonces:  $A'_b{}^{(0)} = A_b^{(0)} + \partial_b \chi$ , y

$$(\partial A'_b / \partial t)^{(0)} = (\partial A_b / \partial t)^{(0)} + \partial(\partial_b \chi) / \partial t. \text{ Entonces es claro que } \partial^a A'_a = 0 \text{ en } \Sigma.$$

Notamos que los nuevos datos

$$E'_i = \nabla_i A'_0 - \partial A'_i / \partial t = \nabla_i A_0 + \nabla_i (\partial \chi / \partial t) - \partial A_i / \partial t - \partial(\nabla_i \chi) / \partial t = \\ \nabla_i A_0 - \partial A_i / \partial t = E_i$$

Asi que  $\nabla^i E'_i = \nabla^i E_i = 0$ .

3) Notamos que en la norma de Lorentz la ecuación de evolución sería :

$$\partial^a \partial_a A_b = 0 \quad **$$

Resolvemos entonces esta ecuación para cada componente  $A_b$  con datos iniciales  $A'_b{}^{(0)}$  y  $(\partial A'_b/\partial t)^{(0)}$ .

El punto es que la ecuación \*\* con dichos datos tiene una buena formulación de datos iniciales según lo garantiza el teorema 10.1.2. En particular la solución es única.

4) Sin embargo faltaría por ver si la solución resultante satisface la Norma de Lorentz: Acá consideramos la solución con los nuevos datos pero suprimimos las primas. Notamos que la construcción anterior ya nos da las funciones  $A_b$  en todo  $t$ . Para considerar “la norma” notamos que la cantidad  $U = \partial^b A_b$  satisface la ecuación  $\partial^a \partial_a U = 0$ , y su valor inicial en  $\Sigma$  es  $U = 0$  por construcción de los datos iniciales, mientras que:

$$\begin{aligned} \partial U/\partial t &= \partial(\partial^b A_b)/\partial t = \partial(\partial^0 A_0 + \partial^i A_i)/\partial t = \\ &= -\partial^2 A_0/\partial t^2 + \partial^i (\partial A_i/\partial t) = -\partial_i (\partial_i A_0) + \partial^i (\partial A_i/\partial t) = \partial_i (-\partial_i A_0 + \partial A_i/\partial t). \end{aligned}$$

pero en todo  $\Sigma$ , los datos iniciales satisfacen la ligadura  $\partial_i A_0 - \partial A_i/\partial t = 0$ , así que tomando derivadas en  $\Sigma$ , obtenemos  $\partial_i (-\partial_i A_0 + \partial A_i/\partial t) = 0$  en  $\Sigma$ , o sea que  $\partial U/\partial t = 0$

$\Rightarrow$  la unicidad de la solución de la Ec. de KG para  $U$  con datos iniciales  $U = 0$  y  $\partial U / \partial t = 0$  en  $\Sigma$ , asegura que  $U = 0$  en todos lados. Por lo tanto la solución está en la norma de Lorentz y por lo tanto la solución de  $**$ ,  $A_b$  es también solución de  $*$ .

5) Que se puede decir sobre la unicidad de la solución en general? Dados datos iniciales  $(A_b, \partial A_b / \partial t)^{(0)}$  consideremos dos distintas construcciones de datos iniciales equivalentes en la Norma de Lorentz  $(A'_b{}^{(1)}, (\partial A'_b / \partial t)^{(1)})$  y  $(A'_b{}^{(2)}, (\partial A'_b / \partial t)^{(2)})$ . Estos datos iniciales se diferencian por una transformación de Norma. Es decir existe un  $\chi$  en un entorno de  $\Sigma$  tal que  $A'_b{}^{(2)} - A'_b{}^{(1)} = \partial_b \chi$ ,

y  $\partial A'_b / \partial t^{(2)} - \partial A'_b / \partial t^{(1)} = \partial(\partial_b \chi) / \partial t$ . Como ambos datos iniciales satisfacen la norma de Lorentz es claro que  $\partial^b \partial_b \chi = 0$  en  $\Sigma$ . Llamamos  $X$  a la solución de la ecuación de K.G con datos iniciales dados por  $\chi$  y  $\partial \chi / \partial t$  en  $\Sigma$ .

Consideremos ahora las 2 soluciones espaciotemporales correspondientes  $A_b^{(1)}$  y  $A_b^{(2)}$  y definimos  $V_b = A_b^{(2)} - A_b^{(1)}$ . Es claro que  $V_b$  satisface  $\partial^a \partial_a V_b = 0$ .

Por otro lado es claro que en  $\Sigma$  tenemos  $V_b = \partial_b X$ ,  $\partial V_b / \partial t = \partial(\partial_b X) / \partial t$ , y que  $\partial^a \partial_a (\partial_b X) = 0$  por lo tanto, usando la unicidad de la solución de la Ec de KG, dados datos iniciales tendremos que para todo  $t$ ,  $V_b = \partial_b X$ . Es decir que las dos

6) Finalmente , si tenemos dos soluciones con los mismos datos iniciales cada una de ellas se puede llevar a una solución en la norma de Lorentz por medio de una transformación de norma, y como vimos esas dos a su vez pueden diferir como máximo por una transformación de Norma que (respeta la norma le Lorentz). De esto modo concluimos que las dos soluciones originales difieren a lo máximo por una transformación de Norma y son por lo tanto físicamente equivalentes.

- Tarea: Leer segunda parte de la pg 245 y hacer el problema 10. 2

# Relatividad General

- En este caso la situación es algo mas compleja tanto técnica- como conceptualmente.
- Para empezar en contraste con otras teorías en que el espacio-tiempo esta dado y lo que se requiere es la evolución de ciertas cantidades o campos en dicho espacio-tiempo, en nuestro caso se trata de buscar el espacio-tiempo mismo. Para esto hay que describirlo como la evolución de algo, en base a una instancia de ese algo que ha de servir como “datos iniciales”
- Consideremos el caso de la relatividad general en vacío por simplicidad, pero el tratamiento que haremos es directamente generalizable al caso en que existan otros campos que funjan como materia ( siempre que para estos se tenga en principio una buena formulación de datos iniciales).
- Nos limitaremos al análisis de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos ( o a subconjuntos globalmente hiperbólicos de espacio-tiempos generales).

- Recordemos que dado un  $(M, g_{ab})$  globalmente hiperbólico, existe una foliación de esta por hipersuperficies de Cauchy  $\Sigma_t$  caracterizadas por el valor de una función Tiempo Global  $t$  de modo que topológicamente tenemos  $M = \Sigma \times \mathcal{R}$ .
- Esto permitiera concebir al espacio-tiempo como evolución en  $t$  de los datos asociados con proyección de la métrica  $g_{ab}$  en  $\Sigma$ , y de su “derivada temporal”.
- Para esto es necesario definir como se han de identificar los puntos de las distintas hipersupecífies  $\Sigma_t$ .
- Esto lo haremos introduciendo un campo vectorial temporal  $t^a$ , con la caracterizado por satisfacer  $t^a \nabla_a t = 1$ .
- [Que existe, pues en particular podemos tomar
- $t^a = C g^{ab} \nabla_b t$ , con  $C = (g^{ab} \nabla_b t \nabla_a t)^{-1}$
- entonces  $t^a t_a = C^2 g^{ab} \nabla_b t \nabla_a t < 0$ ,
- y por otro lado  $t^a \nabla_a t = C g^{ab} \nabla_b t \nabla_a t = 1$  ] ¿Que esta mal?.

Nota esto lo podemos hacer cuando ya tenemos (la métrica en) el espacio-tiempo. Estamos por el momento asumiendo esto, luego cambiaremos de punto de vista cuando consideremos la construcción de la misma a partir de los datos iniciales.

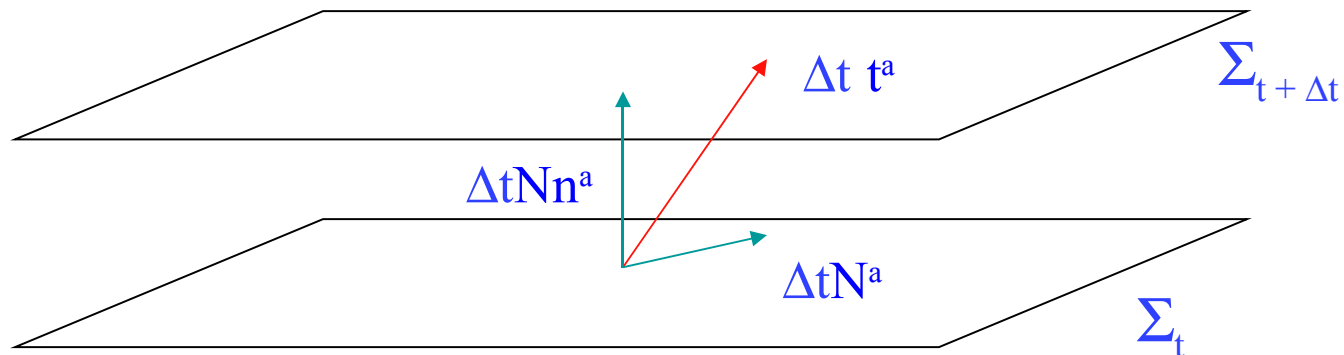
- Dada una hipersuperficie  $\Sigma$ , y el campo  $t^a$  procedemos a separarlo en sus partes normal y tangencial a  $\Sigma$ . Para usamos  $n^a$  el vector unitario normal a  $\Sigma$  y definimos, la función de lapso ( lapse)  $N = -n^a t_a$ , y el vector de corrimiento (shift):

$$N_a = t_a - n_a N = g_{ab} t^b + n_a n_b t^b = (g_{ab} + n_a n_b) t^b = h_{ab} t^b$$

donde  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  es la métrica inducida en  $\Sigma$ .

Recordemos que el operador de proyección en  $\Sigma$  es  $P^a_b = \delta^a_b + n^a n_b$  y la métrica inversa es  $h^{ab} = g^{ab} + n^a n^b$  de modo que  $h^{ab} h_{bc} = P^a_c$ . Notar que para subir el índice de  $N_a$  se puede usar indistintamente  $h^{ab}$  o  $g^{ab}$ .

- De ese modo tenemos  $t^a = N n^a + N^a$



- Los datos iniciales entonces consistirán de  $h_{ab}$  la métrica inducida en  $\Sigma$  “y su derivada temporal”. En el caso de esta última la noción apropiada está ligada con la curvatura extrínseca. Recordar que a esta la habíamos definido así: dada una hipersuperficie espacial  $\Sigma$ , considerábamos a las geodésicas normales a  $\Sigma$  y los vectores (temporales) unitarios tangentes  $\xi^a$  y definíamos la curvatura extrínseca de  $K_{ab} = \nabla_a \xi_b$ , pero como  $n^a$  el vector unitario normal a  $\Sigma$ , sobre  $\Sigma$  tendremos  $\xi^a = n^a$  de modo que  $K_{ab} = \nabla_a n_b$  y como este es bi-ortogonal a  $n^a$  podemos escribir:

$$K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$$

Recordemos que la derivada de Lie de un campo tensorial en la dirección de un campo vectorial  $\xi^a$  es:

- $L_\xi h_{ab} = \xi^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b \xi^c + h_{cb} \nabla_a \xi^c$ , ahora
- $\nabla_c h_{ab} = \nabla_c (g_{ab} + n_a n_b) = n_a \nabla_c n_b + n_b \nabla_c n_a$ , así que
- $L_\xi h_{ab} = \xi^c n_a \nabla_c n_b + \xi^c n_b \nabla_c n_a + h_{ac} \nabla_b \xi^c + h_{cb} \nabla_a \xi^c$
- Recordando que sobre  $\Sigma$  tenemos  $\xi^a = n^a$ , que  $\nabla_a \xi_b$  es bi-ortogonal a  $\xi^a$ , y es simétrica (por ser  $\xi^a$  ortogonal a una hipersuperficie), obtenemos:
- $L_\xi h_{ab} = h_a^c \nabla_b \xi_c + h_b^c \nabla_a \xi_c = h_a^c \nabla_c \xi_b + h_b^c \nabla_c \xi_a = 2 K_{ab}$

Es decir que  $K_{ab} = (1/2) L_\xi h_{ab}$