

# Formulación de Valores Iniciales

Capitulo 10

# Formulación de Valores Iniciales

Teorías físicas se usan para hacer predicciones, por lo tanto la evolución subsecuente debe poder ser deducida de las observaciones en un tiempo anterior. Incluso en el caso de una teoría cuántica, queremos poder predecir las probabilidades de observaciones futuras en términos de los datos acerca de la preparación del sistema, y es mas esperamos que en el limite en que  $\hbar \rightarrow 0$  recuperar las predicciones exactas de la teoría clásica.

- En general para poder hacer predicciones se requiere una dependencia suave de la evolución con los datos iniciales ( cosa que no ocurre en un sistema caótico).
- Finalmente en el caso de una teoría relativista esperamos que la modificación de los datos iniciales no afecten regiones causalmente inaccesibles.

- En Mecánica tenemos que las ecuaciones de E-L para un sistema con  $N$  variables  $q_i$  se pueden en general resolver (conoce algún ejemplo en que no se puedan resolver?) para las  $d^2q_i/dt^2$  dando  $N$  ecuaciones del tipo:

- $$d^2q_i/dt^2 = F_i ( q_k, dq_k/dt, t )$$

- Un teorema de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura que, (si las  $F_i$  son suficientemente suaves) dadas las  $N$  posiciones  $(q_i)_0$  y  $N$  velocidades  $(dq_i/dt)_0$  iniciales (en total “ $2N$  grados de libertad” o datos arbitrariamente especificables) existe en un rango de valores de  $t$  alrededor de  $t_0$  una única solución del conjunto de ecuaciones que satisface dichas condiciones iniciales. Y lo que es más, que los  $q_i(t)$  para un  $t$  fijo, dependen continuamente de los datos iniciales.
- Es de esperar que una teoría física razonables tenga similares características

- Ecuación de Klein Gordon en Minkowski:

$$\partial^a \partial_a \phi - m^2 \phi = 0$$

- Sabemos que se puede obtener ( ver cualquier curso de TCC) como el limite  $N \rightarrow \infty$  de un sistema de  $N$  osciladores a harmónicos acoplados con sus vecinos, así que es de esperar que los resultados se generalicen.
- De hecho se puede escribir en coordenadas Minkoskianas como:

$$\partial^2 \phi / \partial t^2 = \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 - m^2 \phi$$

y el Teorema de Cauchy Kowalewski nos garantiza la existencia de soluciones para datos iniciales analíticos:

- Teorema 10.1

Sean  $t, x_1 \dots x_{m-1}$  coordenadas en  $\mathbb{R}^m$

Consideremos el sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales parciales para las funciones  $\phi_1, \dots, \phi_N$  de la forma:

$$\partial^2 \phi_i / \partial t^2 = F_i(t, x_j, \phi_k, \partial \phi_k / \partial t, \partial \phi_k / \partial x_j, \partial^2 \phi_k / \partial t \partial x_j, \partial^2 \phi_k / \partial x_j \partial x_l)$$

Donde las  $F_i$  son funciones analíticas de todas sus entradas,  $\Rightarrow$  dados datos iniciales  $\phi_k(x, t=0) = f_k(x)$  y  $\partial \phi_k / \partial t (x; t=0) = g_k(x)$  con  $f_k$  y  $g_k$  analíticas, existe en un entorno de la superficie  $t=0$  una única solución analítica a las eq. \* que satisface los datos iniciales dados.

- Sin embargo esto no es suficiente pues :
- 1) No nos informa sobre la dependencia de la solución con los datos iniciales.
- 2) Al limitarse a funciones analíticas no permite considerar la posibilidad de modificar los datos iniciales solo en una región  $S$  en la hipersuperficie inicial y ver si se afecta la solución fuera de  $J^+(S)$ .

Para estudiar estas cuestiones se puede hacer uso de la linealidad de la ecuación de Klein Gordon y de la conservación del tensor de energía-momentum y de la estacionaridad de Minkowski.

- El tensor de energía momentum para un campo de KG es

- $$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - (1/2) g_{ab} (\partial^c \phi \partial_c \phi - m^2 \phi^2)$$

(nos referimos a Minkowski pero hacerlo en general no es mas difícil).

Es fácil ver que la Ec. de KG  $\Rightarrow \nabla^a T_{ab} = 0$

- Si  $\xi^c$  es un campo de Killing ( $\nabla_{(a} \xi_{c)} = 0$ ) tendremos que

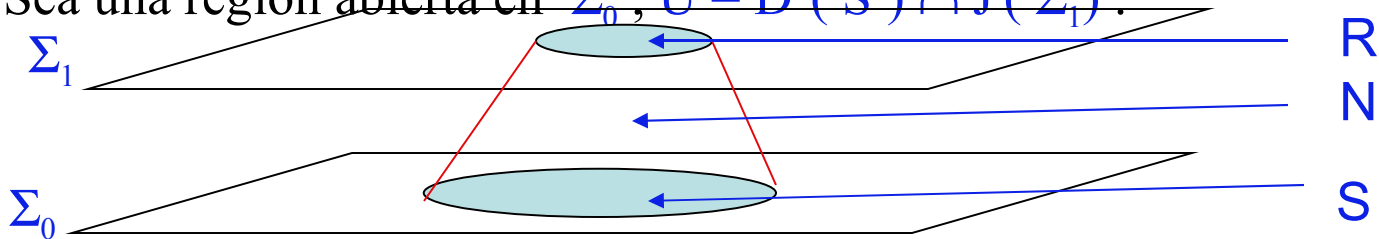
$$\nabla^a (T_{ab} \xi^b) = 0$$

y entonces dada una región ( conjunto abierto medible, etc )  $U$  en  $M$ :

$$0 = \int_U \nabla^a (T_{ab} \xi^b) d^4V = \int_{\partial U} T_{ab} \xi^b dS^a$$

Consideremos ahora un solución a la Ec. de KG con datos iniciales en una hiper-superficie plana espacial  $\Sigma_0$  ( $t=0$ ),  $\xi^a$  el campo de Killing ortogonal a esta superficie  $(\partial/\partial t)^a$  y otra superficie  $\Sigma_1$  también ortogonal a ese campo ( $t=t_1$ ).

- Sea una región abierta en  $\Sigma_0$ ,  $U = D^+(S) \cap J(\Sigma_1)$ .



Llamamos  $R = D^+(S) \cap \Sigma_1$ ,  $N = \partial U - (S \cup R)$  claramente una hiper-superficie nula. Tenemos entonces que

$$0 = \int_S T_{ab} \xi^b dS^a + \int_R T_{ab} \xi^b dS^a + \int_N T_{ab} \xi^b dS^a$$

- El elemento de volumen en la superficie nula implica la multiplicación por

$$dS^a = \sqrt{h} ds dx_1 dx_2 k^a$$

donde la métrica del espacio-tiempo se ha escrito como

- $g_{ab} = h_{ij} (dx^i)_a (dx^j)_b + 2 dl_{(a} ds_{b)} \quad \text{con } k^a = (\partial / \partial s)^a$

y  $h$  es el determinante de la 2 métrica espacial  $h_{ij}$ .

- Recordemos que  $T_{ab}$  del campo de KG satisface la DEC,  $-T_{ab}\xi^b$ , es temporal o nulo dirigido al futuro, como  $k^a$  es nulo dirigido al futuro  $T_{ab}\xi^b k^a \geq 0$  así que :

$$\int_S T_{ab}\xi^b dS^a + \int_R T_{ab}\xi^b dS^a = -\int_N T_{ab}\xi^b dS^a \leq 0$$

( es el flujo de energía a través de  $N$  ).

- Por lo tanto tomando en cuenta que la normal a  $\Sigma_0$  hacia el exterior de  $U$  es  $-\xi^a$  y que la normal a  $\Sigma_1$  hacia el exterior de  $U$  es  $\xi^a$  tenemos:

$$\int_P T_{ab}\xi^a \xi^b dV < \int_S T_{ab}\xi^a \xi^b dV$$

- que en nuestro caso se traduce en (salvo un factor de 1/2):

$$\int_{\mathbf{R}} [(\partial\phi/\partial t)^2 + \sum_i (\partial\phi/\partial x_i)^2 + m^2\phi^2] d^3x \leq \int_{\mathbf{S}} [(\partial\phi/\partial t)^2 + \sum_i (\partial\phi/\partial x_i)^2 + m^2\phi^2] d^3x$$

- De aca podemos extraer varias conclusiones:
- 1) Unicidad de la solución: Si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son soluciones a la Ec. de KG con iguales datos iniciales en  $\mathbf{S}$ , entonces es claro ( por la linealidad de la Ec. )  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  es solución que se hace cero en  $\mathbf{S}$  por lo tanto, de nuestra desigualdad concluimos que en  $\mathbf{R}$ ,  $\phi=0$ .
- 2) 1) claramente muestra que al cambiar datos fuera de  $\mathbf{S}$ , no se afecta a la solución en  $\mathbf{D}+(\mathbf{S})$ .
- 3) Si se cambian los datos un “poco” ( usando como medida una norma construida con integrales de los cuadrados de  $\phi$  y sus derivadas. La solución en  $\mathbf{R}$  cambia poco ( en la misma medida). Leer Wald pg. 247 a 249.

# Notas sobre integración

- Estos resultados se pueden generalizar:
- **Teorema 10.1.2.** Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, y  $\nabla_a$  un operador derivada. Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie de Cauchy suave. Consideremos el sistema de  $N$  ecuaciones lineales para las  $N$  funciones  $\phi_1, \dots, \phi_N$  de la forma:

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi_i + \sum_j (A_{ij})^a \nabla_a \phi_j + \sum_j B_{ij} \phi_j + C_i = 0$$

Con  $(A_{ij})^a$ ,  $B_{ij}$  y  $C_i$  suaves en  $M$

(ec diferencial lineal diagonal de segundo orden hiperbólica).

$\Rightarrow$  dados datos iniciales suaves  $(\phi_i, n^a \nabla_a \phi_i)_{i=1..n}$  ( $n^a$  unitario normal a  $\Sigma$ ) en  $\Sigma$ , existe una única solución en  $M$ . La solución depende continuamente con los datos iniciales y la variación de los datos fuera de un cerrado  $S \subset \Sigma$  no afecta la solución en  $D(S)$ .