Clase 6

- Proposición 9.3.1

Sea (M, g) un espacio-tiempo que satisface $R_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0 \ \forall \xi^a$ temporal. Sea γ una geodésica temporal y $p \in \gamma$. Si la congruencia de geodésicas temporales que salen de p hacia el futuro tome un valor $\theta_0 < 0$ en $r \in \gamma$, $\Rightarrow \exists \ q \in \gamma$ punto conjugado de p en un tiempo propio τ (medido desde r), con $\tau \leq 3 / | \theta_0 |$, claro, asumiendo que γ se extiende al e menos esta cantidad de tiempo propio!.

- Def: Diremos que un espacio-tiempo que satisface la condición temporal genérica, si en toda geodésica temporal γ hay al menos un $p \in \gamma$ donde $R_{abcd} \xi^a \xi^d \neq 0$ (ξ^a tangente a γ).

- Proposición 9.3.2

Sea (M, g) un espacio-tiempo que satisface la condición temporal genérica, y $R_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0 \ \forall \xi^a$ temporal, $\Rightarrow$ toda geodésica temporal completa γ tiene un par de puntos conjugados.

- Relación entre extremalidad temporal de geodésicas temporales y existencia de puntos conjugados.
- Consideremos un punto p y otro $q \in I^+(p)$ y el conjunto C de curvas temporales de p a q y la función tiempo propio τ sobre este conjunto. Sabemos que una geodésica γ esta caracterizada por la condición de que para cualquier familia uniparamétrica de curvas que la contenga, parametrizada por α donde $\alpha = 0$ corresponda a γ se tiene $\tau(\alpha)/d\alpha\, |0 = 0$. Nos interesa ahora considerar la segunda variación para ver si e se trata e un extremo, o un punto de inflexión. Un calculo algo largo, pero directo (Ver Wald pg 227 228) resulta en
- $d^2\tau(\alpha)/d\alpha^2\, |0 = \int X^b O(X_b)\, dt$ Donde $O(X_a) = T_c\nabla^c(T_b\nabla^b X_a) + R_{cba}{}^d T^b T_d X^c$

- Teorema 9.3.3. Sea γ una curva temporal de p a q, entonces γ maximiza el tiempo propio de p a q sii γ es una geodésica sin puntos conjugados entre p y q.

- Idea de la demostración: Si γ no es geodésica existen variaciones de primero orden de cualquier signo, en particular positivo. Si γ contiene un punto r conjugado a p entre p y q, entonces con el vector de Jacobi usado como desviación geodésica obtenemos una curva de p a r con igual tiempo propio (hasta orden 2) que el segmento de γ de p a r. Usando dicha curva concatenada con el segmento de γ de r a q tenemos una curva con igual tiempo propio (hasta orden 2), Redondeando la arista podemos conseguir alargar el tiempo propio a primer orden.

Conjugación entre un punto y una hiper-superficie:

- Def: Dada Σ una hiepersuperficie espacial, consideramos la congruencia de geodésicas ortogonales a Σ (que son temporales) parametrizadas por tiempo propio. Sea ξ^a el campo tangente a estas geodésicas. La curvatura extrínseca de Σ, K_{ab} es:

$$K_{ab} \equiv \nabla_a \xi_{\ b|\Sigma} = B_{\ ab|\Sigma}$$

- Como vimos antes K_{ab} es bi-ortogonal a ξ^a o sea es puramente espacial. En este caso la congruencia es o.s. (ortogonal a Σ por construcción) el twist es $0 \Rightarrow K_{ab}$ es simétrica.

- Tarea Chequear que

$$K_{ab} = 1/2\ L_\xi\ (g_{ab}) = 1/2\ L_\xi\ (h_{ab} - \xi_a \xi_b) = 1/2\ L_\xi\ (h_{ab})$$

- Tarea chequear que en coordenadas normales gaussianas adaptadas a ξ^a se tiene:

$$K\mu\nu = \partial h\mu\nu / \partial t$$

- La traza de la curvatura extrínseca es $K \equiv h^{ab} K_{ab} = h^{ab} B_{ab} = \theta$

- Def: Un punto $p \in M$, sobre una geodésica γ de la congruencia ortogonal a Σ se dirá conjugado a Σ si existe un vector desviación η^a ortogonal a ξ y $\neq 0$ en Σ pero es 0 en p.

- Proposición 9.3.4
- Sea (M, g) un espacio-tiempo que $R_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0 \ \forall \xi^a$ temporal, y sea Σ una hipersuperficie espacial y $q \in \Sigma$ donde $K = \theta < 0 \Rightarrow$ En un tiempo propio $\tau < 3/|K|$ hay un p sobre γ la geodésica ortogonal a Σ por q, que es conjugado a Σ, claro suponiendo que γ se extiende tanto.

- Teorema 9.3.5
- Sea γ una curva temporal de p a q en Σ, (hipersuperficie espacial suave). Entonces γ maximiza (localmente) el tiempo propio de p a Σ sii γ es una geodésica ortogonal a Σ sin puntos conjugados entre p y Σ.

Todas estas consideraciones tienen sus análogos nulos:

- Proposición 9.3.6

  Sea (M, g) un espacio-tiempo que satisface $R_{ab}\ k^a k^b \geq 0\ \forall k^a$ nulo. Sea γ una geodésica nula y $p \in \gamma$. Si la congruencia de geodésicas nulas que salen de p hacia el futuro tome un valor $\theta_0 < 0$ en $r \in \gamma$, $\Rightarrow \exists\ q \in \gamma$ punto conjugado de p dentro de un parámetro afín $\lambda \leq 2/|\theta_0|$, (medido desde r), asumiendo que γ se extiende al menos esta cantidad de parámetro afín.

- Def: Diremos que un espacio-tiempo que satisface la condición genérica nula, si en toda geodésica nula γ hay al menos un $p \in \gamma$

  donde $k_{[e}R_{\ a]bc[d}\ k_{\ f]}\ k^b k^c \neq 0$ (k^a tangente a γ).

- Proposición 9.3.7

  Sea (M, g) un espacio-tiempo que satisface la condición genérica nula ,

  y $R_{ab}\ k^a k^b \geq 0\ \forall k^a$ nulo , $\Rightarrow$ toda geodésica nula completa γ tiene un par de puntos conjugados.

- Def: Dada μ una curva causal suave de p a q diremos que es suavemente deformable a una curva temporal de p a q si existe una familia uniparametrica de curvas $\lambda(\alpha)$ de p a q con $\lambda(0)=\mu$ y $\lambda(\alpha)$ temporal $\forall\alpha>0$.

- Teorema 9.3.8.
- Sea μ una curva causal suave y $p, q \in \mu$. Tendremos que μ no es suavemente deformable a una curva temporal de p a q sii μ es una geodésica nula sin puntos conjugados a p entre p y q.

- En el caso nulo podemos considerar la noción de conjugación para una superficie espacial bidimensional S:

  Esta tiene dos normales nulas dirigidas la futuro. Asumimos que S es orientable y seleccionamos las geodésicas "salientes" y las "entrantes". Llamaremos a dichas colecciones de geodésicas, "congruencias" aunque solo general 3 superficies nulas.

- Def: Sea μ un elementote una congruencia de geodésicas nulas ortogonales a S superficie espacial 2D. Un $p \in \mu$ se dirá conjugado a S si existe sobre μ un vector de desviación de la congruencia, $\neq 0$ en S pero es 0 en p.

- Proposición 9.3.9

  Sea (M, g) un espacio-tiempo que satisface $R_{ab}\ k^a k^b \geq 0\ \forall k^a$ nulo. Sea S una subvariedad bi-dimensional espacial tal que la expansión θ de las geodésicas nulas salientes toma un valor $\theta_0 < 0$ en $q \in S$, $\Rightarrow \exists\ p$ punto conjugado de S, sobre la geodésica nula μ saliente de q, dentro de un parámetro afín $\lambda \leq 2 / |\theta_0|$, (medido desde q), asumiendo que μ se extiende al menos esta cantidad de parámetro afín.

- Teorema 9.3.10 . Sea S una subvariedad bi-dimensional espacial y μ una curva causal de S a p . Tendremos que μ no es suavemente deformable a una curva temporal de S a p sii μ es una geodésica nula ortogonal a S sin puntos conjugados a S entre S y p.

- Teorema 9.3.11. Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico y K una subvariedad espacial compacta y orientable $\Rightarrow \forall p \in \partial(I^+(K))$, $\exists\ \gamma$ una geodésica nula dirigida al futuro, que es ortogonal a K pasa por p y no tiene puntos conjugados entre K y p.