

# Clase 5

Entregar tareas.

# Congruencias geodésicas

Teníamos una congruencia de geodésicas temporales, parametrizadas por tiempo propio. Sus tangentes satisfacen  $\xi^a \xi_a = -1$

- **Def:**  $B_{ab} = \nabla_a \xi_b$ . Entonces

i)  $\xi^a B_{ab} = 0$ , y  $\xi^b B_{ab} = 0$  o sea  $B_{ab}$  es bi-ortogonal a  $\xi^a$ .

ii) Escogíamos una subfamilia uniparamétrica y considerábamos el vector de desviación geodésica  $\eta^a$ , elegido de modo que  $\eta_b \xi^b = 0$ .

iii) Como  $[\eta, \xi]^b = \eta^a \nabla_a (\xi^b) - \xi^a \nabla_a (\eta^b) = 0$  tenemos que

$\xi^a \nabla_a (\eta^b) = \eta^a B_a^b \Rightarrow B_{ab}$  mide la falla de  $\eta^b$  de ser transportado paralelamente.

- Consideramos  $S_p(M)$  el sub-espacio de  $T_p(M)$  ortogonal a  $\xi^a$ .

Sea  $\xi^a, V_{(1)}^a, V_{(2)}^a, V_{(3)}^a$  una base ortonormal de  $T_p(M) \Rightarrow V_{(1)}^a, V_{(2)}^a, V_{(3)}^a$  es base de  $S_p(M)$ . El proyector es  $p^a_b = \delta^a_b + \xi^a \xi_b$

Su métrica es  $h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b$ .

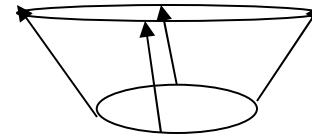
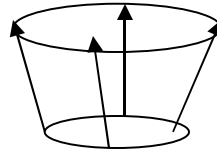
Su inversa (restringida a  $S_p(M)$ ) es  $h^{ab} = g^{ab} + \xi^a \xi^b$  pues  $h_{ab} h^{bc} = p^c_b$ .

**Def:** expansión  $\theta = B_{ab} h^{ab}$ , twist  $w_{ab} = B_{[a,b]}$  anti-simétrico

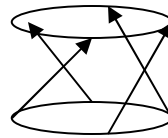
y cizalla (Shear)  $\sigma_{ab} = B_{(a,b)} - (1/3) h_{ab} \theta$  simétrico y de traza 0

# Significado Físico

Expansión:



Shear:



Twist:

**Tarea 1)** Hacer los cálculos detallados de los ejemplos sec. 2.2 (pg 33 a 36) de “A relativistic Toolkit”, E. Poisson.

**2)** Considere una onda gravitacional sobre un fondo plano representada por  $g_{mn} = \eta_{mn} + \gamma_{mn} e^{ik(z-t)}$  (Coordenadas Minkowskianas del fondo) con

$$\gamma_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular expansión, shear, y twist de las geodésicas asociadas con  $(\partial/\partial t)$  antes de que pase la onda.

**Nota:** El teorema de Frobenius **Apendice B 3.2** dice que un campo  $\xi^a$  es ortogonal a una superficie (o.s.) sii  $\exists v^a$  tal que  $\nabla_{[a, \xi_{b]} = v_{[a, \xi_{b]}}$ .

Pero como  $\xi^b \nabla_{[a, \xi_{b]} = 0$  tenemos que  $\nabla_{[a, \xi_{b]} = v_{[a, \xi_{b]} \Rightarrow v_a$  es proporcional a  $\xi_a$  (posiblemente 0), pero en cualquier caso  $\nabla_{[a, \xi_{b]} = 0$ . Es decir que  $\xi^a$  es (o.s.)  $\Rightarrow$  el twist es 0

Por otro lado si el twist es 0  $\Rightarrow v^a = 0$  satisface  $\nabla_{[a, \xi_{b]} = v_{[a, \xi_{b]}}$

$\Rightarrow \xi^a$  es (o.s.) .

Es decir en nuestro caso  $\xi^a$  es (o.s.) sii el twist es 0.

## Evolución a lo largo de las geodésicas

Para empezar es claro que:  $B_{ab} = (1/3)\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + w_{ab}$

$$\begin{aligned} \text{Nos interesa } "dB_{ab}/d\tau" &= \xi^c \nabla_c (B_{ab}) = \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi_a \\ &= \xi^c (\nabla_c \nabla_b \xi_a - \nabla_b \nabla_c \xi_a) + \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a \\ &= \xi^c R_{cba}{}^d \xi_d + \nabla_b (\xi^c \nabla_c \xi_a) - \nabla_b (\xi^c) \nabla_c (\xi_a) \\ &= R_{cba}{}^d \xi^c \xi_d + 0 - B^c{}_b B_{ac} \end{aligned}$$

De esta ecuación se puede extraer la evolución de  $\theta$ ,  $\sigma_{ab}$ , y  $w_{ab}$ .

En particular contrayendo con  $g^{ab} = h^{ab} - \xi^a \xi^b$  tenemos:

$$\xi^c \nabla_c \theta = R_{cb}{}^{bd} \xi^c \xi_d - h^{ab} B^c{}_b B_{ac} = -R_c{}^d \xi^c \xi_d - B^{ca} B_{ac} \text{ de modo}$$

$$\text{que : } d\theta/d\tau = -R_{cd} \xi^c \xi^d - (1/3)\theta^2 - \sigma_{ab} \sigma^{ab} + w_{ab} w^{ab}$$

**Ecuación de Raychadury**, central en el teorema de crecimiento del área de los agujeros negros y en los teoremas de singularidades.

Notemos que los términos 2 y 3 tienen signo definido.

Veamos ahora el Primero:  $-R_{cd} \xi^c \xi^d$  Usando las ecuaciones de Einstein conectamos con la materia en el espacio-tiempo:  $R_{cd} - (1/2)g_{cd} R = 8\pi G T_{cd} \Rightarrow$

$$R_{cd} = 8\pi G(T_{cd} - (1/2)g_{cd} T) \Rightarrow -R_{cd} \xi^c \xi^d = -8\pi G (T_{cd} \xi^c \xi^d + (1/2)T)$$

Esto nos lleva a considerar las **Condiciones de energía:**

WEC:  $\forall \xi^a$  temporal,  $T_{cd} \xi^c \xi^d \geq 0$ .

SEC:  $\forall \xi^a$  temporal unitario,  $T_{cd} \xi^c \xi^d + (1/2)T \geq 0$ .

DEC:  $\forall \xi^a$  temporal dirigido al futuro,  $-T_{cd} \xi^c$  es temporal o nulo dirigido al futuro.

NEC:  $\forall \xi^a$  nulo,  $T_{cd} \xi^c \xi^d \geq 0$ .

En una base local Minkoskiana  $t^a, x^a, y^a, z^a$  para materia “razonable” tendremos

$$T_{cd} = \rho t_a t_b + P_1 x_a x_b + P_2 y_a y_b + P_3 z_a z_b \text{ densidad y presiones principales.}$$

(¿para que caso razonable no se puede escribir así?)

WEC:  $\Leftrightarrow \rho \geq 0$  &  $\rho + P_i \geq 0, i=1,2,3$ .

SEC:  $\Leftrightarrow \rho + \Sigma P_i \geq 0$  &  $\rho + P_i \geq 0, i=1,2,3$ .

DEC:  $\Leftrightarrow \rho \geq |P_i|, i=1,2,3$ .

NEC:  $\Leftrightarrow \rho + P_i \geq 0, i=1,2,3$ .

Tarea:  
Demostrar  
todo esto

Relaciones: DEC  $\Rightarrow$  WEC, WEC  $\Rightarrow$  NEC y SEC  $\Rightarrow$  NEC

**Proposición:** Si se satisfacen las Ec. de Einstein con materia que satisfacen la SEC y si  $w_{ab}=0 \Rightarrow \theta(\tau)^{-1} \geq \theta_0^{-1} + (1/3) \tau$

**Dem :** De la ec. de Raychadury

$$d\theta/d\tau = -R_{cd} \xi^c \xi^d - (1/3)\theta^2 - \sigma_{ab} \sigma^{ab} + w_{ab} w^{ab}$$

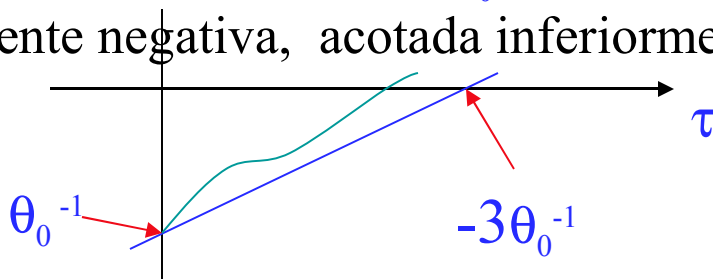
$$d\theta/d\tau \leq -(1/3)\theta^2 \Rightarrow \theta^{-2} d\theta/d\tau \leq -(1/3) \Rightarrow -d(\theta^{-1})/d\tau \leq -(1/3)$$

$$\Rightarrow d(\theta^{-1})/d\tau \geq (1/3) \Rightarrow \text{integrando } \theta(\tau)^{-1} \geq \theta_0^{-1} + (1/3) \tau .$$

**Lema 9.2.1:** Si se satisfacen las Ec. de Einstein con materia que satisfacen la SEC y si  $w_{ab}=0$  (congruencia ortogonal a hipersuperficie, Frobenius)

y  $\theta_0 < 0 \Rightarrow \theta \rightarrow -\infty$  en un tiempo propio menor a  $-3 \theta_0^{-1}$ .

**Dem :** Del lema anterior  $\theta(\tau)^{-1} \geq \theta_0^{-1} + (1/3) \tau$  así que  $\theta(\tau)^{-1}$  es una función inicialmente negativa, acotada inferiormente por la recta  $\theta_0^{-1} + (1/3) \tau$ .



Entonces se acerca a 0 antes que esta recta, que lo hace para

$\tau = -3 \theta_0^{-1} (>0)$ . Finalmente, cuando  $\theta^{-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow -\infty$ .

**Nota:** Esto no refleja aún singularidades, simplemente “Causticas”

# Congruencias Geodésicas Nulas

Llamamos  $\lambda$  al parámetro afín,  $k^a$  al vector tangente. Consideramos una sub-familia uniparamétrica, con parámetro  $s$ , y vector de desviación  $n^a$ .

**Tarea:** Demostrar que  $n^a(\tau)$  se puede escribir como  $n^a(\tau) = n^a_{pp}(\tau) + l^a(\tau)$  donde  $n^a_{pp}(\tau)$  es propagado paralelamente y  $l^a$  ortogonal a  $k^a$ .

**Nota 1:** No nos interesa  $n^a_{pp}(\tau)$ , solo  $l^a$ .

**Nota 2:** Tomando una base local Minkoskiana  $t^a, x^a, y^a, z^a$  tal que

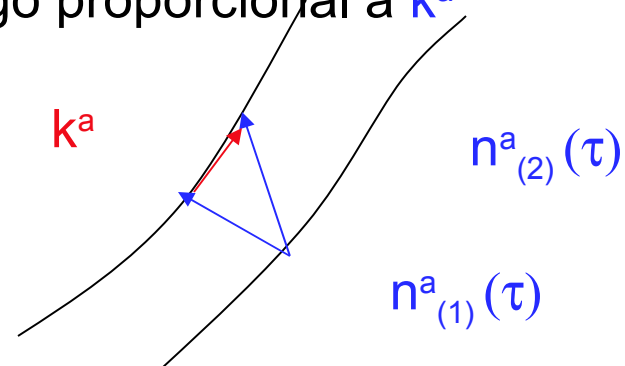
$k^a = c(t^a + x^a) \Rightarrow$  Los  $l^a$  ortogonales a  $k^a$  son combinación lineal

de  $k^a, y^a, z^a$ . Pero dado  $l^a$  la descomposición en su parte

proporcional a  $k^a$  y su parte ortogonal a  $k^a$  ¡no es única! Pues en este caso  $k^a$  es proporcional ortogonal a  $k^a$ .

**Nota 3:** Si  $n^a_{(1)}(\tau)$  y  $n^a_{(2)}(\tau)$  difieren por algo proporcional a  $k^a$

$\Rightarrow$  Representan la misma desviación geodésica:



## Formalismo para el caso nulo

Dada la congruencia de geodésicas nulas, definimos para cada  $p$  en ella

**Def:**  $V_p = \{ v^a \in T_p(M) / v^a k_a = 0 \}$

**Def:** En  $V_p$  definimos la relación  $\approx$  así:  $v^a \approx w^a \Leftrightarrow v^a - w^a \propto k^a$

**Tarea:** demostrar que  $\approx$  es una relación de equivalencia.

**Def:**  $V_p^\square = V_p / \approx$  el espacio de las clases de equivalencia.

**Tarea:** Consideremos en  $V_p^\square$  las operaciones:  $+$ ,  $\bullet$  definidas así:

$$[v^a] + [w^a] \equiv [v^a + w^a] \quad \text{y} \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \alpha \bullet [v^a] \equiv [\alpha v^a]$$

- i) Demostrar que las operaciones están bien definidas.
- ii) Demostrar que  $(V_p^\square, +, \bullet)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathfrak{R}$ .
- iii) Demostrar que la proyección  $\Pi : V_p \rightarrow V_p^\square$  dada por  $\Pi(v^a) \equiv [v^a]$  esta bien definido.

Ahora queremos considerar la proyección de tensores generales a este espacio.

Consideremos un elemento  $\mu_a$  del espacio dual  $T_p^*(M)$ .

Claramente define también un elemento  $\mu_a$  de  $V_p^*$ , pues  $T_p^*(M) \subset V_p^*$ .

Para poder definir  $\mu_a^\square$  en  $V_p^{\square*}$  el dual de  $V_p^\square$  se requiere definir  $\mu_a^\square([v^a])$  para lo que tenemos el candidato  $\mu_a v^a$  pero para que esta sea una buena definición se requiere que si  $w^a \in [v^a]$  entonces  $\mu_a w^a = \mu_a v^a$ .

Es decir que para una buena definición se requiere que  $\mu_a k^a = 0$

En general un tensor  $T^{abc\dots}_{efg\dots}$  sobre  $T_p^*(M)$  definirá un tensor  $T^{abc\dots}_{efg\dots}$  sobre  $V_p^\square$  si satisface la condición **C**.

**Def :**  $T^{abc\dots}_{efg\dots}$  satisface la condición **C**. Si su contracción en un índice con  $k^a$  o  $k_a$  y en los demás índices superiores con  $v^a / k_a v^a = 0$ ; y en los demás índices inferiores con  $\mu_a / \mu_a k^a = 0$ , da como resultado 0.

**Notar:** 1)  $g_{ab}$  satisface la condición **C**  $\Rightarrow$  define  $h_{ab}^\square$  métrica en  $V_p^\square$

2)  $g^{ab}$  satisface la condición **C**  $\Rightarrow$  define  $h^{ab\ \square}$  inv. métrica en  $V_p^{\square*}$

3)  $h_{ab}^\square h^{bc\ \square} = \delta_a^{c\ \square}$  en  $V_p^\square$ .

Consideraciones análogas al caso temporal nos llevan a

**Def**  $B_{ab} = \nabla_a k_b$ . Entonces  $k^a B_{ab} = 0$ , y  $k^b B_{ab} = 0$  o sea

entonces define  $B_{ab}^{\square}$

**Def:** expansión  $\theta = B_{ab}^{\square} h^{ab \square}$ , twist  $w_{ab}^{\square} = B_{[a,b]}^{\square}$  anti-simétrico

y Shear  $\sigma_{ab}^{\square} = B_{(a,b)}^{\square} - (1/2) h_{ab}^{\square} \theta$  simétrico y de traza 0.

Tendremos entonces  $B_{ab}^{\square} = (1/2) \theta h_{ab}^{\square} + \sigma_{ab}^{\square} + w_{ab}^{\square}$

Nos interesa “ $dB_{ab}/d\lambda$ ” =  $k^c \nabla_c (B_{ab}) = R_{cba}{}^d k^c k_d - B^c{}_b B_{ac}$

De acá se puede extraer la evolución de  $\theta$ ,  $\sigma_{ab}^{\square}$  y  $w_{ab}^{\square}$

En particular contrayendo con  $h^{ab \square}$  tenemos:

$$d\theta/d\tau = -(R_{cd} k^c k^d) - (1/2)\theta^2 - \sigma_{ab}^{\square} \sigma^{ab \square} + w_{ab}^{\square} w^{ab \square}$$

En completa analogía con el caso temporal, tenemos:

**Lema 9.2.2:** Si  $k^a$  es el campo tangente ( asociado a un parámetro afín) a una congruencia de geodésicas nulas, y el espacio-tiempo es solución de las las Ec. de Einstein con materia que satisface la NEC y si  $w_{ab}=0$  ( congruencia ortogonal a hipersuperficie, Frobenius) y  $\theta_0 < 0$

En algún punto de la congruencia,  $\Rightarrow \theta \rightarrow -\infty$  en un dentro de un rango de parámetro afín menor a  $-2 \theta_0^{-1}$  .

**Tarea Llenar detalles.**

# Puntos conjugados

Consideremos la ecuación de desviación geodésica:

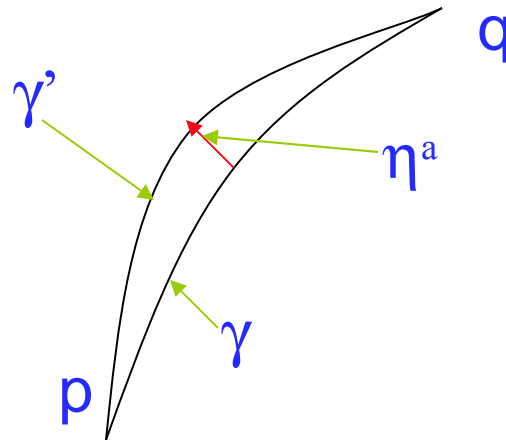
$$a^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) = -R_{cbd}{}^a T^c T^d X^b \quad (\text{ver cap3})$$

**Def:** Dada una geodésica  $\gamma$  con parámetro afín y tangente  $v^a$ , un campo  $\eta^a$  definido sobre  $\gamma$  se llama un **campo de Jacobi** si es solución a la ecuación de desviación geodésica

$$v^c \nabla_c (v^b \nabla_b \eta^a) = -R_{cbd}{}^a v^c v^d \eta^b$$

**Def:** Dada una geodésica  $\gamma$  con parámetro afín y tangente  $v^a$ , un par de  $p$  y  $q$  puntos sobre  $\gamma$  se dirán **puntos conjugados**, si existe un campo de Jacobi  $\eta^a \neq 0$ , tal que  $\eta^a(p) = \eta^a(q) = 0$ .

Refleja la versión  
infinitesimal de:



## Condiciones para la presencia de puntos conjugados:

Sea  $\gamma$  una geodésica con parámetro afín y tangente  $v^a$  y  $p$  en  $\gamma$ .

Consideremos la congruencia de geodésicas temporales salientes de  $p$  y dirigidas al futuro.

Todo campo de Jacobi que se anula en  $p$  es vector de desviación geodésica de esta congruencia.

**Proposición :** Un punto  $q$  en  $\gamma$  en el futuro de  $p$  es conjugado a  $p$   
 $\Leftrightarrow \theta \rightarrow -\infty$  en  $q$ .

**Demostración: Tarea:** Estudiar del Wald pg 225 -226.