

Clase 4

Singularidades

Singularidades

Tanto Schwarzschild como los espacio-tiempos cosmológicos (FRW) tienen singularidades ($r=0$ y $a=0$) respectivamente. Es esto genérico o causado por el alto grado de simetría de estas soluciones?

Consideraciones físicas lo llevan a uno a esperar que la Relatividad general deje de ser válida a escalas de Planck es decir cuando algún escalar de curvatura crezca a valores del orden de $(l_p)^N$ para el N dimensionalmente apropiado.

(**Cuidado:** si uno simplemente considera componentes de tensores estas podrían ser grandes simplemente por la elección del “sistema de referencia”)

Entonces que es una singularidad?

Pensaríamos que es un lugar donde R , R^{ab} , R_{ab} , etc. se hace divergente.

Para hacer esta noción rigurosa el primer impedimento es la **noción de “ lugar”**.

En otras teorías el espacio-tiempo está dado, entonces no hay problema con la noción de lugar: En Rel. Especial & EM el punto ($r=0$) donde está localizada una carga puntual es un lugar donde los campos no están bien definidos

En RG la situación es diferente: Un espacio tiempo es un par (M, g_{ab}) , donde M es una variedad diferencial y g_{ab} es una métrica suave definida en todo M . Entonces $r=0$ en Schwarzschild y $\tau=0$ en cosmología estándar NO son parte de la variedad!

- **Enfoque 1:** Considerar variedades con fronteras. Cuando estas sean singulares tendríamos en ellas el lugar (eventos) donde estaría la singularidad. (En las fronteras no estaría definida en general la métrica!) Pero la definición de Frontera singular enfrenta muchos problemas (no existe una prescripción genérica satisfactoria).

- **Enfoque 2:** Notamos que tanto en Schwarzschild como en FRW existen escalares de curvatura que divergen cuando $(r \rightarrow 0)$ $(\tau \rightarrow 0)$. Al menos dos problemas:

I) Existen espacio tiempos en que ningún escalar de curvatura diverge sin embargo Riemann es singular en el sentido de que en ningún sistema coordenado sus componentes son suaves. *

II) El espacio tiempo puede ser singular incluso si Riemann es suave Ej: El espacio tiempo de una cuerda cósmica: (Coordenadas cilíndricas (t, z, ρ, ϕ)).

Tomamos $\phi_0 < 2\pi$, e identificamos ϕ_0 y 0 para $\rho > 0$.

- La métrica es plana: $ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$.
- En todo evento con $\rho > 0$, $R_{abc}^d = 0$. Sin embargo no se puede extender a $\rho = 0$. (Como se demostraría?)

- **Enfoque 3** : Clasificación de las posibles tipos de singularidades. Poco prometedor pues parece haber infinitos tipos de comportamientos patológicos!
- **Enfoque 4**: (El que se toma) Considerar “los huecos que quedan en el espacio tiempo regular en que se han quitado las singularidades”. Específicamente seguimos demandando que (M, g) sea regular en todo punto, de modo que los huecos se detecten por medio de la existencia de geodesias inextensibles (en algún dirección) de longitud afín finita
- (generalización de tiempo propio para las temporales, distancia propia para las espaciales, y parámetro afín par alas nulas).
- **Def**: Una geodésica se dirá INCOMPLETA si es inextensible en alguna dirección con parámetro afín finito.
- **Def**: Un espacio tiempo se dirá extensible si es isométrico a un subconjunto propio de otro espacio tiempo.
- **Def**: Un espacio tiempo se dirá inextensible si.....

.....no es extensible.

- **Def:** Un espacio tiempo inextensible se dirá que tiene una singularidad si existe al menos una geodésica incompleta [Nos concentraremos en le caso nulo y temporal por el significado físico de estas geodésicas (Fin de partícula masiva u observador, y fotón respectivamente)] Se puede caracterizar con los siguientes criterios:
 - **i)** Singularidad de escalar de Curvatura:
Hay un escalar de v curvatura que diverge al acercarnos a la singularidad por la geodésica incompleta.
 - **ii)** Singularidad de Curvatura en propagación paralela:
algún componente expresada en términos de una tétrada propagada paralelamente a lo largo de la geodésica, de un tensor construido en base a Riemann y sus derivadas covariantes, diverge al acercarnos a la singularidad por la geodésica incompleta.
 - **iii)** Singularidad no ligada a la curvatura: No ocurre ninguna de las anteriores.

Esta caracterización es incompleta: Si al quitar singularidades quedara siempre un hueco, este sería percibido por todo tipo de curvas. Existen espacio-tiempos que son completos respecto a geodésicas de un tipo pero incompletos respecto a las de otro.

Ej: La variedad es \mathbb{R}^4 con métrica $g_{ab} = \Omega \eta_{ab}$

En coordenadas esféricas

$$\Omega = \Omega(r, t) \text{ con } \Omega = 1 \quad \forall r \geq 1$$

pero $\Omega(r=0, t) \rightarrow 0$, para $t \rightarrow \infty$, como e^{-at} con $a > 0$.

De modo que el parámetro afín a lo largo de $(r=0, t)$, converja.

Tendremos una geodésica temporal incompleta, pero todas las geodésicas espaciales o nulas serán completas.

También se puede escoger un espacio-tiempo que sea completo respecto a nulas y temporales pero incompleto ante las espaciales.

Hay ejemplos en que todas las geodésicas son completas pero hay curvas temporales de aceleración propia acotada que son incompletas (cohetes con combustible finito terminan su existencia).

Congruencias geodésicas

Def: Sea $O \subset M$ abierto. Una congruencia en O es un conjunto C de curvas tales que $\forall p \in O$ se \exists γ curva de C sobre la cual se halla p .

- Si la congruencia es suave \Rightarrow los vectores tangentes a dichas curvas definen un campo vectorial sobre O , y viceversa, todo campo vectorial suave, (y que no se hace 0 en ningún punto) en O determina una congruencia de curvas.
- Consideremos una congruencia de geodésicas temporales, y parametrizamos por el tiempo propio a lo largo de cada una. El campo de vectores tangentes ξ^a satisface entonces $\xi^a \xi_a = -1$
- **Def:** $B_{ab} = \nabla_a \xi_b$
- Tenemos:
 - i) Geodesica con parámetro afin $\Rightarrow \xi^a \nabla_a \xi_b = 0 = \xi^a B_{ab}$
 $\nabla_a (\xi_b \xi^b) = \nabla_a (-1) = 0 = 2 \xi^b \nabla_a \xi_b = 2 \xi^b B_{ab}$
 - o sea B_{ab} es biortogonal a ξ^a

- **Sentido Físico:** Consideremos sub-familia uniparamétrica de geodésicas de la congruencia, y la parametrizamos por s . Los parámetros τ, s dan coordenadas en una superficie bidimensional S . Consideramos (si fuera necesario) un cambio de coordenadas en S :

$$\forall \tau' (\tau, s) = \tau + C(s)$$

- $s' = s$

- De modo que $\xi^{a'} = (\partial \alpha')^a_{|s'} = (\partial \alpha)^a_{|s} = \xi^a$

- Def $\eta^a = (\partial \alpha)^a_{|t}$ y $\eta^{a'} = (\partial \alpha')^a_{|t'}$

- Notamos que $\eta'(f) = (\partial f / \partial \alpha')_{|t'} = \partial f(s, \tau(\tau', s)) / \partial \alpha'_{|t'} = \partial f(s, \tau(\tau', s)) / \partial \alpha_{|t} + \partial f(s, \tau(\tau', s)) / \partial \tau|_s (\partial \alpha / \partial \tau)_{|t'}$.

- Pero $\tau = \tau' - C(s)$ así que $(\partial \alpha / \partial \tau)_{|t'} = -dC(s)/ds = -C'(s)$

- Entonces $\eta'(f) = \eta(f) - \xi(f) C'(s)$ para toda f es decir

- $(\eta^a)' = \eta^a - C'(s) \xi^a$

- Usamos esta libertad para pedir que inicialmente

$$(\eta_a)' \xi^a = \eta_a \xi^a - C'(s) \xi_a \xi^a = \eta_a \xi^a + C'(s) = 0$$

- Es decir escogemos en $\tau=0$:

$$C'(s) = -\eta_a \xi^a(0,s) \text{ e integramos para obtener } C(s).$$

- Así queda determinado el cambio de variables y ahora tiramos los primas.
Notemos ahora que como τ, s son coordenadas sobre una superficie $[\eta \xi]^b = 0$.

- Es decir

$$\eta^a \nabla_a (\xi^b) - \xi^a \nabla_a (\eta^b) = 0$$

- Entonces

$$\begin{aligned} \partial(\eta_b \xi^b) / \partial \tau &= \xi^a \nabla_a (\eta_b \xi^b) = \eta_b \xi^a \nabla_a (\xi^b) + \xi^a \nabla_a (\eta_b) \xi^b = \\ &0 + \eta^a \nabla_a (\xi_b) \xi^b = (1/2) \eta^a \nabla_a (\xi_b \xi^b) = 0 \end{aligned}$$

- Entonces $\eta_b \xi^b$ es independiente de τ , pero en $\tau=0$ era 0!

Así que es 0 siempre.