Clase 3

¿Dudas de la clase anterior?

Entrega de tareas

Dominios de Dependencia e Hiperbolicidad Global

Def: Dado $S \subset M$ cerrado y acronal, el borde de S es el conjunto

$\{ p \in S /\ \forall O$ entorno de p, $\exists\, q \in O \cap I^{+}(p)$ y $\exists\, q \in O \cap I^{-}(p)$ y

$\exists\, \gamma$ una curva temporal de r a q tal que $\gamma \cap S = \emptyset . \}$

Def: Un $S \subset M$ cerrado y acronal y sin borde se llamara una sección o corte.

Teorema 8.3.1: Sea S un corte no vacío en M entonces S es una sub-variedad 3 dimensional C^0 encajada en M.

Def: Sea $S \subset M$ cerrado y acronal (con o sin borde), su dominio de dependencia futuro se define como

$D+(S) = \{ p \in M /$ toda curva causal inextendible al pasado intersecta $S\}$

Analogamente definimos $D-(S)$ y $D(S) = D+(S) \cup D-(S)$.

Def: Un conjunto cerrado y acronal Σ tal que $D(\Sigma) = M$ se llama una superficie de Cauchy.

Estas nunca tiene borde. Predictibilidad en $D(\Sigma)$ en base a datos en Σ.

Def : Un espacio-tiempo (M, g) que contiene una superficie de Cauchy se llama globalmente hiperbólico. (Ejemplos que no lo son)

Lema 8.3.2: $p \in \overline{D^+(S)}$ sii $\forall\ \lambda$ curva temporal inextendible al pasado que pasa por p, λ intersecta S. (idea)

Tarea 2 demostrar Lema 8.3.3

Prepsicion 8.3.4:Sea Σ una superficie de Cauchy y sea λ una curva causal inextendible, entonces λ intersecta Σ, $I^+(\Sigma)$ y $I^-(\Sigma)$.

Lema 8.3.2: $p \in \overline{D^+(S)}$ sii $\forall\ \lambda$ curva temporal inextendible al pasado que pasa por p, λ intersecta S. (idea)

Tarea 2 demostrar Lema 8.3.3

Prepsicion 8.3.4: Sea Σ una superficie de Cauchy y sea λ una curva causal inextendible, $\lambda \Rightarrow$ intersecta Σ, $I^+(\Sigma)$ y $I^-(\Sigma)$.

Def: Sea S cerrado acronal, el horizonte futuro de Cauchy de S es $H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I^-[D^+(S)]$ (claramente es cerrado).

Notar : $I^-[H^+(S)] \subset I^-[\overline{D^+(S)}] = I^-[D^+(S)] \subset M - H^+(S)$ asi que $I^-[H^+(S)] \cap H^+(S) = \varnothing$ o sea $H^+(S)$ es acronal.

Analogamente definimos $H^-(S)$, y $H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$.

Teorema 8.3.5: Todo $p \in H^+(S) \Rightarrow \exists\ \lambda$ geodésica nula, que pasa por p, y esta contenida $H^+(S)$, y es inextendible o tiene un punto final en S.

Preposicion 8.3.6: $H(S) = \partial D(S)$.

Tarea 2c Problemas 3, 4, y 5 Capitulo 8 (de Wald)

Ejemplo: Anti DeSitter (AdS)

- Solución de las ecuaciones de Einstein-vacío con constante cosmológica negativa.
- $ds^2 = -\cosh^2(x)\, dt^2 + dx^2 + \sinh^2(x)\, (d\theta^2 + \sin(\theta)\, d\varphi^2)$

  $t \in (-\infty, \infty)$ y $x \in [0,\infty)$
- Las geodésicas radiales nulas: $dt = \pm\, dx/ \cosh(x)$

  $t = \pm \arctan(e^x) + C$ Cuando $x \to -\infty$, $t \to C$ por lo tanto toda hipersuperficie que tenga t acotado por arriba o por abajo no es de Cauchy. Pero si caracterizamos una hipersuperficie como $t=f(x)$ suave (suponemos) el vector radial tangente es $T^a =(f', 1)$, y para que sea espacial se requiere que $-\cosh^2(x)\,(f')^2 +1 >0$, o sea $f'< \cosh^{-1}(x)$ Por lo cual $f(x)$ converge en ∞. Entonces $f(x)$ es acotada (por que?)! Asi que no es hipersuperficie de Cauchy. De hecho AdS no es globalmente hiperbólico.

(¿Que faltaría para tener una demostración rigurosa ?)

Notar : AdS se puede visualizar como la pseudo-esfera

$$W^2+ T^2- X^2- Y^2- Z^2= 1$$

en el espacio 5 D con métrica $ds^2 = - dW^2 - dT^2 +X^2 +Y^2+ Z^2$

(De hecho ha de verse como el espacio covertura simplemente conexo)

Corolario: Si M es conexo, un conjunto acronal cerrado no vacío Σ es una superficie de Cauchy para M sii $H(\Sigma) = \varnothing$.(si Σ es de Cauchy, $D(\Sigma) = M$, y su frontera es $\varnothing$. Si $H(\Sigma) = \varnothing = D(\Sigma) - \mathrm{int}(D(\Sigma))$ pero entonces $D(\Sigma) = \mathrm{int}(D(\Sigma))$, pero entonces $D(\Sigma)$ es abierto y cerrado, pero como M es conexo (es disconexo si existen dos cerrados disjuntos que cubren a M) solo hay dos conjuntos con esta propiedad M y $\varnothing$. Como no es $\varnothing$ es M asi que Σ es de Cauchy.

Teorema 8.3.7. : Sea Σ acronal y cerrado $\Longrightarrow$ es de Cauchy sii toda geodésica nula inextendible intersecta Σ, $I^+(\Sigma)$ y $I^-(\Sigma)$

Lema 8.3.8. Todo espacio globalmente hiperbólico es fuertemente causal (mas adelante veremos que es causalmente estable lo que es mas fuerte).

Topología en el espacio de Curvas

- Sea (M, g) un espacio-tiempo fuertemente causal y $p, q \in M$
- Def $C(p,q)$ es el conjunto de todas las fdcc causales de p a q (identificando curvas que difieren por reparametrización).
- Def topología en $C(p,q)$:
- Sea U abierto en M, $O(U) = \{ \lambda \in C(p,q) / \lambda \subset U \}$.

  El conjunto de los $O(U)$ con U abiertos de M será la base de la topología de $C(p,q)$, es decir $A \subset C(p,q)$ es abierto si $A = \cup_a O(U_a)$ con U_a abiertos en M. (es topología chequear! Es Hausdorff).

Esta topología da una noción de convergencia:

Def Dada $\{\lambda_n\}$ diremos que converge a λ ($\lambda_n \to \lambda$) si $\forall$ O entorno de λ $\exists N > 0 / n > N \Rightarrow \lambda_n \in O$. (Notar que coincide con la noción de curva limite).

Teorema 8.3.9.: Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico y $p, q \in M \Rightarrow C(p,q)$ es compacto.

Teorema 8.3.10.: Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico y $p, q \in M \Rightarrow J^+(p) \cap J^-(q)$ (conjunto de Alexandrov) es compacto.

En efecto en este caso $\forall\ p \in M,\ J^+(p)$ es cerrado. Veamos un resultado mas fuerte.

Teorema 8.3.11.: Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico y $K \subset M$ compacto $\Rightarrow J^+(K)$ es cerrado.

Dem: Sea $r \in \overline{J^+(K)} \Rightarrow \exists\ \{r_n\}$ sucesión en $J^+(K)$, $r_n \to r$. Sea λ_j la fdcc de $p_j \in K$ a r_j. Como K es compacto, existe una sub-sucesión p'_j que converge a $p \in K$. Sea $q \in I^+(r)$ y $s \in I^-(p) \Rightarrow p \in I^+(s)$ y $r \in I^-(q)$

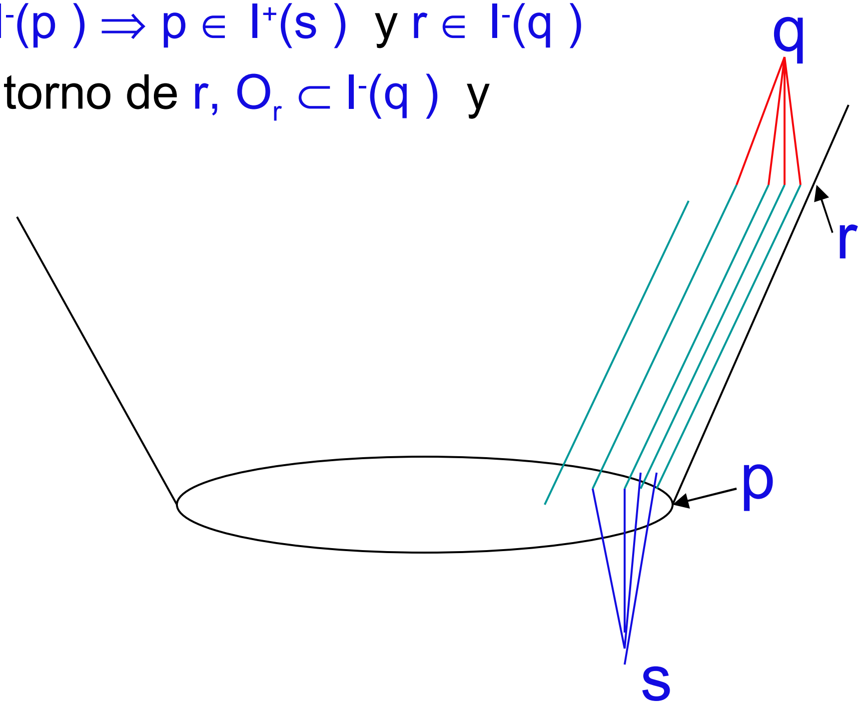
Pero estos conjuntos son abiertos $\Rightarrow \exists\ O_r$ entorno de r, $O_r \subset I^-(q)$ y $\exists\ O_p$ entorno de p, $O_r \subset I^+(s)$.

Sea N tal que $n>N \Rightarrow r'_n \in O_r$ y $p'_n \in O_p$.

Para $n>N$ completamos las curvas λ'_n a fdcc de s a q. Como $C(s,q)$ es compacto $\exists\ \lambda$ fdcc de s a q con $\lambda'_n \to \lambda$.

Como r y p son puntos de convergencia de la sucesión λ'_n, es claro que λ pasa por r y por p. Entonces $r \in J^+(p) \subset J^+(K)$.

Entonces $\overline{J^+(K)} = J^+(K)$ asi que $J^+(K)$ es cerrado.



Teorema 8.3.11.: Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico y $K \subset M$ compacto $\Rightarrow J^+(K)$ es cerrado.

Teorema 8.3.12.: Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, Σ una superficie de Cauchy y $q \in D^+(\Sigma) \Rightarrow J^+(\Sigma) \cap J^-(q)$ es compacto.

Proposicion 8.3.13.: Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, Σ y Σ' superficies de Cauchy $\Rightarrow \Sigma$ y Σ' son homeomorfas.

(homeomorfismo mapeo 1 a 1 y sobre continuo con inverso continuo)

Teorema 8.3.14.: Sea (M, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, $\Rightarrow$ es globalmente estable y existe una función tiempo global $f:M\to\Re$, tal que cada hipersuperficie dada por $\Sigma_t = \{ p \in M / f(p) = t\}$ es una hipersuperficie de Cauchy.

Es decir, el espacio-tiempo se puede foliar por hipersuperficies de Cauchy y la topología de M es $\Sigma \times \Re$.