Clase 2

¿Dudas de la clase anterior?

Las tareas se entregan el primer dia de la semana siguiente a ser puestas.

Def: Dado $S \subset M$, este se dira *"acronal"* si $S \cap I^+(S)=\emptyset$

Teorema 8.1.3: Sea (M, g) t-orientable, y $S \subset M$, entonces $\partial I^+(S)$ es una sub-variedad C^0 3- dimensional acronal ***encajada*** en M (es variedad y sus funciones de transición son continuas, y su topología es la derivada de M).

Demostración tarea 2a.

Extensión de las nociones fdtc fdcc a curvas continuas:

Def: Sea $\lambda(t)$ una curva continua en M. Esta se dirá fdtc si $\forall p \in \lambda$ (i.e Imagen de $\lambda(t)$) $\exists$ U entorno normal convexo de p, tal que $\forall \ \lambda(t_1)\ \lambda(t_2) \in U$, con $t_1 < t_2$, $\exists \gamma$ fdtc (diferenciable) de $\lambda(t_1)$ a $\lambda(t_2)$.

Analogamente extendemos la noción de fdcc.

Nota si dos curvas difieren por una reparametrización, las consideraremos idénticas.

Def: Dado $S \subset M$, este se dira *"acronal"* si $S \cap I^+(S)=\emptyset$

Teorema 8.1.3: Sea (M, g) t-orientable, y $S \subset M$, entonces $\partial I^+(S)$ es una sub-variedad C^0 3- dimensional acronal ***encajada*** en M (es variedad y sus funciones de transición son continuas, y su topología es la derivada de M).

Demostración tarea 2a.

Extensión de las nociones fdtc fdcc a curvas continuas:

Def: Sea $\lambda(t)$ una curva continua en M. Esta se dirá fdtc si $\forall p \in \lambda$ (i.e Imagen de $\lambda(t)$) $\exists$ U entorno normal convexo de p, tal que

$\forall\ \lambda(t_1)\ \lambda(t_2) \in U$, con $t_1 < t_2$, $\exists \gamma$ fdtc (diferenciable) de $\lambda(t_1)$ a $\lambda(t_2)$.

Analogamente extendemos la noción de fdcc.

Nota si dos curvas difieren por una reparametrización, las consideraremos idénticas.

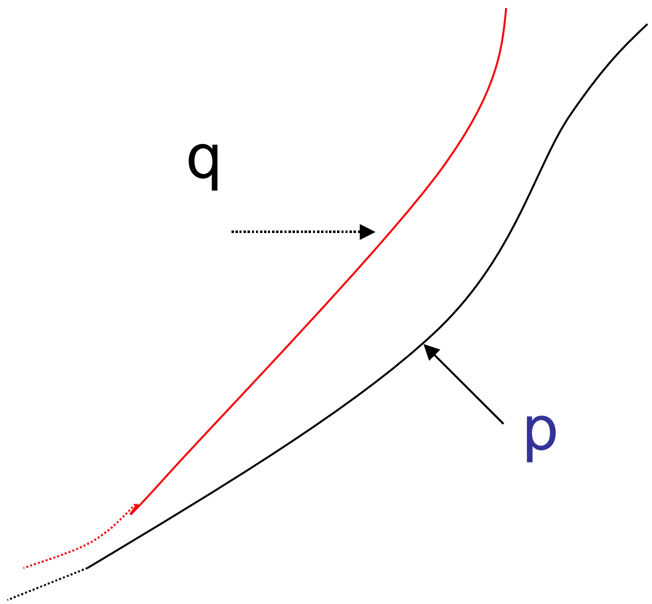
Def Dada $\lambda(t)$ fdtc diremos que p es su punto final futuro (fpf) si $\forall$ O entorno de p, $\exists\ t_0$ tal que $\lambda(t) \in O\ \forall\ t > t_0$.

(La propiedad Hausdoff asegura que cada fdtc no puede haber mas de un fpf, demostración voluntario).

Notar el fpf, si existe, no tiene por que estar en la curva

Def: Una fdtc se dirá inextendible al futuro sii no tiene un fpf.
Analogamente definimos inextendibilidad al pasado.

Lema 8.1.4 Sea λ pdcc inextendible al pasado,
$\forall p \in \lambda$, y $\forall q \in I^+(p)$ $\exists\gamma$ fdtc , tal que $\gamma \subset I^+(\lambda)$: (Wald tiene un "typo").



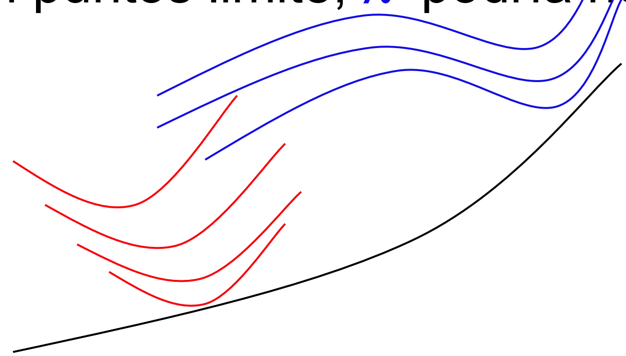
Estas nociones servirán para distinguir las curvas que "continúan para siempre".. "llegan a una Singularidad" o simplemente "paran"..

Def: Dada una sucesión de curvas causales $\{\lambda_n\}$, un $p \in M$ se dirá punto de convergencia de $\{\lambda_n\}$ si $\forall$ O entorno de p, $\exists N > 0$ tal que $\forall n > N$, $(O \cap \lambda_n) \neq \emptyset$.

- Def: Dada una sucesión de curvas causales $\{\lambda_n\}$, una curva λ en M se dirá curva de convergencia de $\{\lambda_n\}$, si $\forall\ p \in \lambda$, es punto de convergencia de $\{\lambda_n\}$.
- Def: Dada una sucesión de curvas causales $\{\lambda_n\}$, un $p \in M$ se dirá punto limite de $\{\lambda_n\}$ si $\forall$ O entorno de p, intersecta infinitas curvas de la sucesion.

- Def: Dada una sucesión de curvas causales $\{\lambda_n\}$, una curva λ en M se dirá curva limite de $\{\lambda_n\}$, si existe un sub-sucesión $\{\lambda_{n'}\}$ para la cual λ, es curva de convergencia.

Nota si λ es curva limite $\Rightarrow \forall p \in \lambda$ es punto limite, pero aunque todos los puntos de λ sean puntos limite, λ podría no ser curva limite:

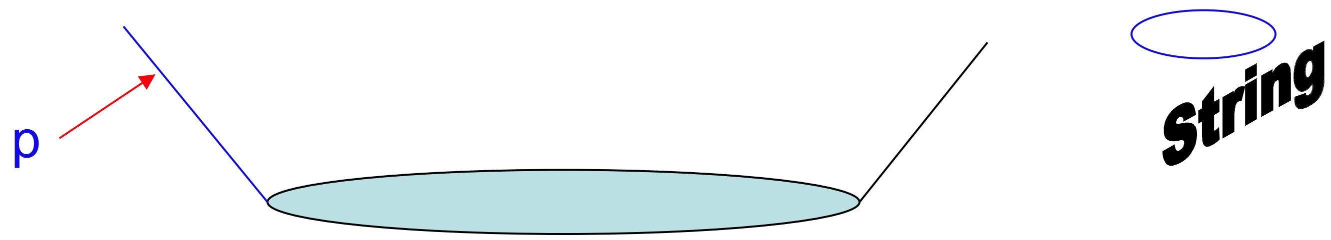


Es decir la aproximación a distintos puntos es por distintas sucesiones.

- Lema 8.1.5: Sea $\{\lambda_n\}$, una secuencia de curvas causales inextendibles al futuro, y sea p un punto limite, $\Rightarrow \exists\ \lambda$ una curva causal inextendible al futuro que pasa por p y es curva limite de $\{\lambda_n\}$.

Notar: Aunque la secuencia sea de curvas temporales, la curva limite puede ser solo causal.

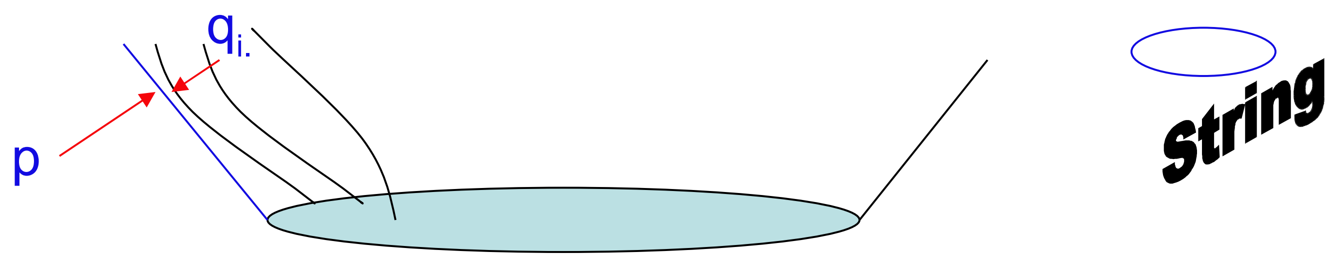
Teorema 8.1.6: Sea $C \subset M$ cerrado. Sea $p \in \partial I^+(C)-C \Rightarrow \exists\ \lambda$ geodésica nula, que pasa por p, y esta contenida en $\partial I^+(C)$, que es , o inextendible al pasado o tiene un punto final (pasado) en C.



- Lema 8.1.5: Sea $\{\lambda_n\}$, una secuencia de curvas causales inextendibles al futuro, y sea p un punto limite, $\Rightarrow \exists\ \lambda$ una curva causal inextendible al futuro que pasa por p y es curva limite de $\{\lambda_n\}$.

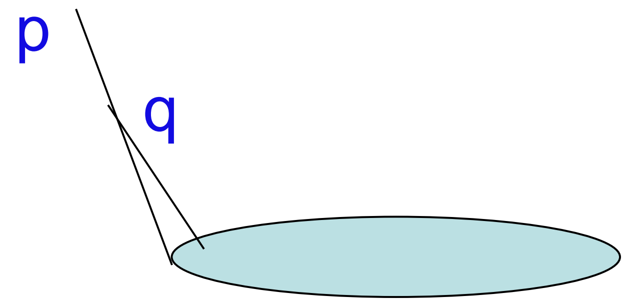
Notar: Aunque la secuencia sea de curvas temporales, la curva limite puede ser solo causal.

Teorema 8.1.6: Sea $C \subset M$ cerrado. Sea $p \in \partial I^+(C)-C \Rightarrow \exists\ \lambda$ geodésica nula, que pasa por p, y esta contenida en $\partial I^+(C)$, que es , o inextendible al pasado o tiene un punto final (pasado) en C.



DEMOSTRACION: Recordar $\partial A = A - \mathrm{int}(A)$, (en nuestro caso $A = I^+(C)$ es abierto) $\Rightarrow \exists\ \{q_n\} \subset I^+(C)$ con $\lim q_n = p$; $\Rightarrow \exists\ \{\lambda_n\}$, con λ_i fdtc de $c_i \in C$ a q_i. Consideremos la variedad $M' = M-C$. $p \in M'$ y $\lambda'_i = \lambda_i \cap M'$ son curvas inextendibles al pasado y p es punto limite de $\{\lambda'_n\} \Rightarrow$ (usando 8.1.5) en M', $\exists\ \lambda$ una curva causal inextendible al pasado (en M') que pasa por p y es curva limite de $\{\lambda'_n\}$. Como cada una de ellas esta en $I^+(C)$ y cada punto de λ es punto limite tendremos que $\lambda \subset \overline{I^+(C)}$.

Supongamos ahora por absurdo que $\lambda \not\subset \partial I^+(C)$. En ese caso $\exists\ q \in \lambda \cap I^+(C)$ así que $\exists\ \gamma$ fdtc de C a q. Esta compuesta con el segmento de λ de q a p es una curva de C a p que no es una geodésica nula. Esta curva se puede deformar en una fdtc de C a p entonces $p \in I^+(C)$. Pero por suposición $p \in \partial I^+(C)$ entonces $p \notin I^+(C)$. Contradicción.



- O sea $\lambda \subset \partial I^+(C)$.

Por otro lado, como $\lambda \subset \partial I^+(C)$ usado el teorema 8.1.2 y los argumentos de su corolario vemos que si no fuera geodésica nula se podría deformar a una curva temporal por lo que $p \in I^+(C)$. Finalmente, como λ es inextedible en M' es o inextendible en M o tiene un punto final pasado en C. ♦

Condiciones de Causalidad

Sabemos que localmente la estructura causal es la de Minkowski, pero globalmente podría haber complicaciones.

Ej. Minkowski con $t=0$ y $t=1$ indentificados (CTC "closed time-like curves").

Tarea2b: Ver el espacio de Goedel e identificar las CTC.

- Incluso si no hay CTC podríamos estar arbitrariamente cercanos a que se forme una. Fig 8.8 de Wald
- Def: (M, g) se dirá fuertemente causal si $\forall p \in M$, y $\forall U$

entorno de p, $\exists V \subset U$, entorno de p, tal que toda curva causal intersecta V como máximo una vez. ((M,g) de 8.8 viola esto).

- Lema 8.2.1. : Sea (M,g) fuertemente causal, y sea $K \subset M$, compacto, $\Rightarrow$ toda λ curva causal contenida en K, tiene puntos finales pasado y futuro.
- Def: (M, g) se dirá causalmente estable si $\exists\, t^a$, un campo vectorial temporal y continuo tal que $(M, \overline{g})$, no contiene CTC donde $\overline{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b$

(conos de luz mas abieros)

Condiciones de Causalidad

Sabemos que localmente la estructura causal es la de Minkowski, pero globalmente podría haber complicaciones.

Ej. Minkowski con $t=0$ y $t=1$ indentificados (CTC "closed time-like curves").

Tarea2b: Ver el espacio de Goedel e identificar las CTC.

- Incluso si no hay CTC podríamos estar arbitrariamente cercanos a que se forme una. Fig 8.8 de Wald
- Def: (M, g) se dirá fuertemente causal si $\forall p \in M$, y $\forall U$

entorno de p, $\exists V \subset U$, entorno de p, tal que toda curva causal intersecta V como máximo una vez. ((M,g) de 8.8 viola esto).

- Lema 8.2.1. : Sea (M,g) fuertemente causal, y sea $K \subset M$, compacto, $\Rightarrow$ toda λ curva causal contenida en K, tiene puntos finales pasado y futuro.
- Def: (M, g) se dirá causalmente estable si $\exists\, t^a$, un campo vectorial temporal y continuo tal que $(M, \overline{g})$, no contiene CTC donde $\overline{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b$

(conos de luz mas abieros)

- Teorema 8.2.2. : (M, g) es causalmente estable sii $\exists$ una función f diferenciable en M y tal que $\nabla^a f$ es un campo vectorial dirigido al pasado.
- Corolario: Si (M, g) es causalmente estable entonces es fuertemente causal.
- La noción de estabilidad causal refleja la idea de que un espacio-tiempo no esta al borde (en sentido de pequeñas perturbaciones) de producir comportamientos causales patológicos (como CTC´s)

Dominios de Dependencia e Hiperbolicidad Global

Def: Dado $S \subset M$ cerrado y acronal, el borde de S es el conjunto

$\{ p \in S / \ \forall O$ entorno de p, $\exists\, q \in O \cap I^+(p)$ y $\exists\, q \in O \cap I^-(p)$ y

$\exists\, \gamma$ una curva temporal de r a q tal que $\gamma \cap S = \emptyset . \}$

Def: Un $S \subset M$ cerrado y acronal y sin borde se llamara una sección o corte.

Teorema 8.3.1: Sea S un corte no vacío en M entonces S es una sub-variedad 3 dimensional C^0 encajada en M.

Def: Sea $S \subset M$ cerrado y acronal (con o sin borde), su dominio de dependencia futuro se define como

$D+(S) = \{ p \in M /$ toda curva causal inextendible al pasado intersecta $S \}$

Analogamente definimos $D-(S)$ y $D(S) = D+(S) \cup D-(S)$.

Def: Un conjunto cerrado y acronal Σ tal que $D(\Sigma) = M$ se llama una superficie de Cauchy.

Estas nunca tiene borde. Predictibilidad en $D(\Sigma)$ en base a datos en Σ.

Def : Un espacio-tiempo (M, g) que contiene una superficie de Cauchy se llama globalmente hiperbólico.

Lema 8.3.2: $p \in \overline{D^+(S)}$ sii $\forall\ \lambda$ curva temporal inextendible al pasado que pasa por p, λ intersecta S. (idea)

Tarea 2 demostrar Lema 8.3.3

Prepsicion 8.3.4: Sea Σ una superficie de Cauchy y sea λ una curva causal inextendible, entonces λ intersecta Σ, $I^+(\Sigma)$ y $I^-(\Sigma)$.

Lema 8.3.2: $p \in \overline{D^+(S)}$ sii $\forall\ \lambda$ curva temporal inextendible al pasado que pasa por p, λ intersecta S. (idea)

Tarea 2 demostrar Lema 8.3.3

Prepsicion 8.3.4: Sea Σ una superficie de Cauchy y sea λ una curva causal inextendible, entonces λ intersecta Σ, $I^+(\Sigma)$ y $I^-(\Sigma)$.

Def: Sea S cerrado acronal, el horizonte futuro de Cauchy de S es $H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I^-[D^+(S)]$.

Analogamente definimos $H^-(S)$, y $H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$.

Teorema 8.3.5: Todo $p \in H^+(S) \Rightarrow \exists\ \lambda$ geodésica nula, que pasa por p, y esta contenida $H^+(S)$, y es inextendible o tiene un punto final en S.

Preposicion 8.3.6: $H(S) = \partial D(S)$.

Tarea 2c Problemas 3, 4, y 5 Capitulo 8 (de Wald)