Planitud asimptotica (Asymptotic Flatness)

Se busca una noción que permita hablar de un cuerpo asilado en relatividad General. Es natural asociar dicha situación con la existencia de una "región infinitamente distante", donde la geometría se parece mucho (globalmente) a la de Minkowski (en particular Riemann es "muy pequeño")

Para logar esto se consideraremos agregar puntos a la variedad.

Conviene notar la analogía con la construcción del "plano proyectivo".

Formulacion axiomatica de Hilbert para la geometría plana.

Nociones primitivas: Puntos, lineas, plano.

El conjunto de todas las lineas lo llamamos L, y el de todos los puntos P.

Relaciones: (entre puntos y lineas) "pertencecer" o "estar en" .

Los axiomas son:

I.1: Dados dos puntos existe una línea que los contiene.

I.2: Dados dos puntos , no existe mas de una línea que los contiene (es única).

I.3: Una línea contiene al menos dos puntos y dada una línea existe al menos un punto que no esta en ella.

IV.1: (Postulado de *Playfair*) Dada una línea m, y un punto A que no esta en m, existe como máximo una línea contiene A y que no interfecta a m (no contiene ningún punto de m).

La geometría eculidaea se caracteriza por fijar en ese postulado la cantidad exacta de una linea.

Def: Dos líneas distintas que no se intersectan se llaman paralelas.

Resultado: Dos líneas son paralelas a una tercera son paralelas entre si.

Supongamos que tenemos un plano Euclídeo. Queremos construir un plano proyectivo, (donde se cumple el postulado con 0 lineas)

Def: Relación entre líneas l, k , Diremos $l \approx k$ si son la misma o son paralelas.

Claramente es una relación de equivalencia.

Definimos $s = L/\approx$

Un nuevo conjuto de puntos: $P' = P \cup s$, los nuevos los llamamos puntos en infinito.

Un nuevo conjunto de lineas: $L' = L \cup \{s\}$, la nueva linea la llamamos la linea en infinito.

Nueva definición de estar:

Dado $A \in P'$ y $l \in L'$ diremos que A esta en l si:

1) $A \in P$ y $l \in L$, si A esta en L en la nocion antigua.
2) $A \in s$ y $l \in L$, si l esta en la clase de equivalencia que define a A
3) $A \in P$ y $l = \{s\}$, no esta.
4) $A \in s'$ y $l = \{s\}$, si esta.

Es fácil ver que se dos puntos determinan una unica recta, y que dada

En nuestro caso la construcción debe ser mas precisa pues queremos poder hablar e tensores, métrica etc. y esto requiere mas estructura.

Consideremos la métrica de Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{Sen}^2(\theta)d\varphi^2)$$

Las geodésicas radiales nulas están dadas por las curvas

S (salientes) $t-r= u$ constante y

E (entrantes) $t+r = v$ constante

Notar que como $r \geq 0$ su "cambio de signo esta asociado a un a cambio brusco de los ángulos". (Estrictamente habría que hacerlo así.)

De modo que $t = (1/2)(u+v)$; $r = (1/2)(v-u)$ (asi que $v \geq u$)

Las S las podemos parametrizar por v, así que cuando v crece tanto t como r crecen. Las E las parametrizamos por por u asi que cuando u crece tanto t crece pero r decrece. Tomamos ahora u y v como c nuevas coordenadas. Su rango es $u, v \in (-\infty,\infty)$ pero $v \geq u$.

En estas coordenadas la métrica de Minkowski es

$$ds^2 = -dudv + (1/4)(v-u)^2(d\theta^2 + \mathrm{Sen}^2(\theta)d\varphi^2)$$

Ahora consideremos una nueva métrica g_{ab} obtenida de la métrica de Minkowski η_{ab} multiplicando por un factor conforme Ω^2 : $g_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$

En nuestro caso tomaremos $\Omega^2 = 4(1+v^2)^{-1}(1+u^2)^{-1}$

De este modo la nueva métrica expresada en las coordenadas que teníamos en la variedad es

$$dz^2 = -4(1+v^2)^{-1}(1+u^2)^{-1}dudv +$$
$$(1+v^2)^{-1}(1+u^2)^{-1}(v-u)^2(d\theta^2 + \mathrm{Sen}^2(\theta)d\varphi^2)$$

Ahora hacemos un nuevo cambio de coordenadas a

$$T = \arctan g\,(v) + \arctan g\,(u)$$
$$R = \arctan g\,(v) - \arctan g\,(u)$$

Recordar que la función $y=\tan g(x)$ es 1 a 1 y sobre de $(-\pi/2,\pi/2)$ a $(-\infty, \infty)$ y es monótona creciente. Así que la función $x=\arctan g(y)$ es 1 a 1 y sobre de $(-\infty, \infty)$ a $(-\pi/2,\pi/2)$ y es monótona creciente. Por lo tanto el rango de las nuevas variables es

$$-\pi < T+R = 2 \arctan g\,(v) < \pi$$

$$-\pi < T - R = 2 \arctan g(u) < \pi$$

$$0 \leq R$$

Veamos ahora la nueva métrica en las nuevas coordenadas:

Tenemos $v = \text{tang}\,(1/2(T+R))$ y $u = \text{tang}\,(1/2(T-R))$

$dv = (1/2)\,(dT + dR)\,\text{Cos}^{-2}\,(1/2(T+R))$.

$du = (1/2)\,(dT - dR)\,\text{Cos}^{-2}\,(1/2(T-R))$.

Pero

$1+v^2 = \text{Cos}^{-2}\,(1/2(T+R))$, $1+u^2 = \text{Cos}^{-2}\,(1/2(T-R))$,

Asi que

$dv(1+v^2)^{-1} = (1/2)\,(dT + dR)$

$du(1+u^2)^{-1} = (1/2)\,(dT - dR)$

y $-4(1+v^2)^{-1}(1+u^2)^{-1}dudv = -dT^2 + dR^2$

Por otro lado

$$(1+v^2)^{-1}(1+u^2)^{-1}\,(v-u)^2 = \text{Cos}^2\,(1/2(T+R))\,\text{Cos}^2\,(1/2(T-R))$$
$$\times[\,\text{tang}(1/2(T+R)) - \text{tang}\,(1/2(T-R))\,]^2$$
$$= [\,\text{Sen}\,(1/2(T+R))\,\text{Cos}\,(1/2(T-R)) -$$
$$\text{Sen}\,(1/2(T-R))\,\text{Cos}\,(1/2(T-R))\,]^2$$

$$= \quad [\mathrm{Sen}\ (1/2(T+R)\ - 1/2(T+R))]^2 = [\mathrm{Sen}\ (R)]^2$$

Asi que

$$dz^2 = -dT^2 + dR^2 + [\mathrm{Sen}\ (R)]^2\ (d\theta^2 + \mathrm{Sen}^2(\theta) d\varphi^2)$$

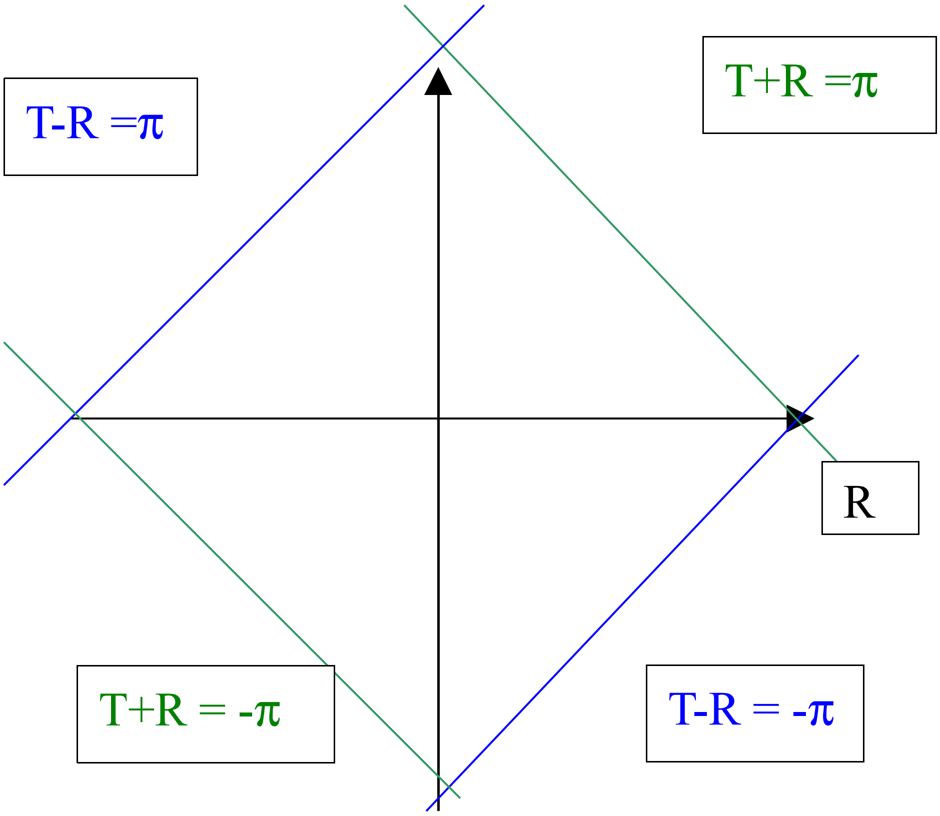
Notamos que

$$d\sigma^2 = dR^2 + [\mathrm{Sen}\ (R)]^2\ (d\theta^2 + \mathrm{Sen}^2(\theta) d\varphi^2)$$

es la métrica de la 3 esfera unitaria. En particular la “2 esfera” en $R= \pi$ es en realidad solo un punto.!!

La métrica que encontramos es la métrica del espacio tiempo estático de Einstein (modelo cosmológico H&I cerrado y estático).

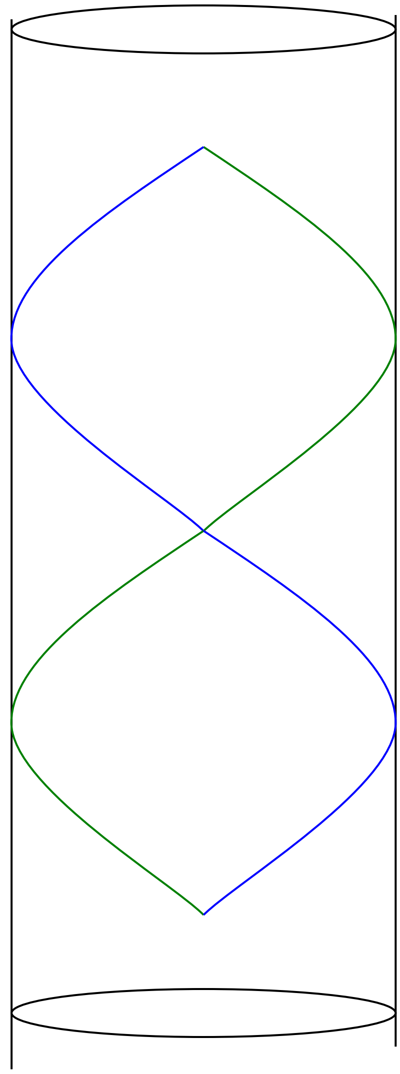
Asi que el espacio-tiempo de Minwkoski es conforme a un pedazo del espacio-tiempo estático de Einstein.



Tenemos también $R \geq 0$.

Podemos también considerar que esto se compensa con los ángulos de modo que el plano r-t se “mapea” entero al rombo, pero que en ambos casos cada 2 esfera en Minkowski esta “mapeada” a dos puntos.

El espacio-tiempo de Minwkoski es conforme al interior del rombo. Pero este rombo representa una parte del espacio-tiempo estático de Einstein:



El punto es que mientras que el espacio-tiempo de Minkowski no es extendible, su imagen bajo el mapeo conforme en el espacio-tiempo estático de Einstein si lo es. La idea es entonces añadir las fronteras de esta imagen para que jueguen el papel de las “regions infinitas” de Minkowski.

Esto lo hacemos extendiendo el rango de las variables R y T para incluir las fronteras.

Definimos:

1) i^+ R=0 , T=π ; u=v=+∞ ó t =+∞
infinito temporal futuro

2) $\Im^+$:T=π-R, 0<R<π; v = +∞ infinito nulo futuro

3) i^0 : T=0, R=π; r = +∞ infinito espacial

4) $\Im^-$: T =R-π, 0<R<π; u = -∞ infinito nulo pasado

5) i^- : R=0 , T=- π; u=v=-∞ ó t =-∞
infinito temporal pasado

Notamos que todas las geodésicas espaciales inician y terminan en i^0.
Las geodésicas nulas dirigiadas la futuro inician en $\Im^-$ y terminan en $\Im^+$. Las geodesicas temporales dirigiadas al futuro, inician en i^- y terminan en i^+.

¿Habra algunas curvas que terminen en lugares equivocados?

Apendice D : Transormaciones conformes

Dada una métrica g_{ab} la métrica $j_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, con Ω^2 suave y positivo, se dice resultado de una transformación conforme.

Una isometría conforme es un difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ tal que $\psi^* g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$.

Precaución: Hay que tener cuidado que métrica se usa para subir indices!!

Notar que dos métricas que difieren por una transformación conforme tienen la misma estructura causal. De hecho esta es una condición necesaria y suficiente para que dos métricas difieran por una transformación conforme. (esta es la base del programa de POSET's de R. Sorkin, dada la estructura causal, solo se requiere algún mecanismo para determinar el factor conforme, un escalar , que el mide cono numero e puntos, para determinar totalmente la métrica).

La relación entre los operadores derivada, y los tensores s de curvatura de dos métricas relacionadas por una transformación conforme son bastante simples.

De hecho sabemos que si $\nabla_a^{(g)}$ es el operador derivada asociado con la metrica g_{ab} y es $\nabla_a^{(j)}$ el operador derivada asociado con la métrica $j_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, estos difieren por un tensor tipo (1,2) $C^a{}_{bc}$ de modo que

$$\nabla_a^{(j)} w_b = \nabla_a^{(g)} w_b - C^c{}_{ab} w_c$$

Es fácil ver (repetir calculo como tarea) que

$$C^c{}_{ab} = 2\, \delta^c{}_{(a} \nabla_{b)} \ln(\Omega) - g_{ab}\, g^{cd}\, \nabla_d \ln(\Omega)$$

Entonces

$$v^a \nabla_a^{(j)} v^b = v^a \nabla_a^{(g)} v^b \;\; + 2\, v^a\, v^c\, \nabla_c \ln(\Omega) - (g_{ac}\, v^a\, v^c)\, g^{bd}\, \nabla_d \ln(\Omega)$$

Entonces si teníamos una geodésica parametrizada con parámetro afín ($v^a \nabla_a^{(g)} v^b = 0$),y si se trataba de una geodésica nula ($g_{ac}\, v^a\, v^c = 0$), tendremos una geodésica que no esta en general parametrizada con un parámetro afín (pero se puede reparametrizar). Pero si no es nula la curva no es siquiera una geodésica respecto a la otra métrica. Una transformación conforme no es simplemente un cambil de unidades (hay muchos artículos diciendo cosas de ese estilo).

Tarea : Calcular la relación entre los tensores de Riemann, los de Weyl etc (o sea verificar el resto del apéndice D).