Vimos que podiamos reducir el problema de valores iniciales de la ecuacion de Einstein en vacío a la forma del Teorema 10.1.3. pero recordemos que este tenía varias limitaciones:

Definición:

Un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden para N variables $\phi_1, \ldots, \phi_N$ es quasilinear diagonal de segundo orden e hiperbólico si se puede escribir de la forma

$$g^{ab}(x, \phi_k, \nabla_c \phi_k) \nabla_a \nabla_b \phi_i = F_i(x, \phi_k, \nabla_c \phi_k) \quad *$$

donde ∇_c es un operador derivada cualquiera, g^{ab} una métrica Lorentziana función suave de sus argumentos y las F_j son funciones suaves de sus argumentos .

Teorema 10.1.3. Sea $\phi_1^{(0)}, \ldots, \phi_N^{(0)}$ un solución del sistema * en una variedad M, $(M, g_{ab}^{(0)})$ con $g_{ab}^{(0)} = g^{ab}(x, \phi_k^{(0)}, \nabla_c \phi_k^{(0)})$ un espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Sea Σ una hipersuperficie de Cauchy suave de $(M, g_{ab}^{(0)})$. Entonces para datos iniciales en Σ suficientemente cercanos a los correspondientes a $\phi_1^{(0)}, \ldots, \phi_N^{(0)}$, existe un O entorno de Σ, tal que el sistema * tiene una solución $\phi_1, \ldots, \phi_N$ en O. El espacio-tiempo $(O, g_{ab}(x, \phi_k, \nabla_c \phi_k))$ es globalmente hiperbólico, la solución es única, y depende continuamente con los datos iniciales (en el sentido de 10.1.1) y la variación de los datos fuera de un cerrado $S \subset \Sigma$ no afecta la solución en $O \cap D(S)$.

Queremos lidiar con estas limitantes del teorema en el caso de su aplicacion a RG.

1) Primero tenemos que encontrar una solucion $g_{ab}^{(0)}$ de las ecuaciones de Einstein en vacío, que juegue el papel de la solución inicial de 10.1.3.

Esta es claramente el espacio-tiempo de Minkowski (que es G.H). Entonces si nuestros datos iniciales son suficientemente cercanos a los correspondientes a Minkowski, estaremos en las condiciones del teorema. Que pasa si no?. El punto es que siempre existen coordenadas en que los datos en un entorno sean suficientemente cercanos a Minkwski: Supongamos que nos dan $h_{\mu\nu}$, $K_{\mu\nu}$ para $\mu,\nu = 1,2,3$ que “no son cercanos a Minkoski”. Recordar que escogíamos $g_{\mu\nu}(x, t=0) = h_{\mu\nu}$ $g_{00}(x, t=0)=1$ y $g_{0i}(x, t=0)=0$, y ponemos $(\partial g_{\mu\nu}/\partial t)(x, t=0) = K_{\mu\nu}$ para $\mu,\nu = 1,2,3$.

Ahora tomamos un punto $p \in \Sigma$, sabemos que se pueden escioger coordenadas tales que la métrica allí sea Minkowski: Tomamos esta coordenadas y^μ. Luego hacemos un rescalamiento

$[g_{\mu\nu}, (\partial g_{\mu\nu}/\partial t)] \Rightarrow [g_{\mu\nu}{*}=\lambda^{-2} g_{\mu\nu}, (\partial g_{\mu\nu}{*}/\partial t) = \lambda^{-2} (\partial g_{\mu\nu}/\partial t)]$

Estos son nuevos datos iniciales, pero que tambien satisfacen las ligaduras (por que?).

Luego hacemos un cambio de variables $y'^\mu = \lambda^{-1} y^\mu$.

En estan nuevas variables:

$$g_{\mu\nu}' = (\partial y^\mu / \partial y'^\rho)(\partial y^\nu / \partial y'^\sigma)\, g_{\rho\sigma}{*} = \lambda^2 g_{\mu\nu}{*} = g_{\mu\nu}$$
$$\partial g_{\mu\nu}'/\partial t' = \partial t/\partial t' \partial(g_{\mu\nu}')/\partial t = \partial t/\partial t' \partial(g_{\mu\nu})/\partial t = \lambda \partial(g_{\mu\nu})/\partial t$$

Por lo tanto tomando λ suficentemente pequeño estaremos suficientemente cerca de datos iniciales para Minkowski. y tendremos en un entorno una solución según 10.1.3.

Dada esta solución $g'_{\mu\nu}{}^{(1)}(y')$, la solución al problema original es $g'_{\mu\nu}{}^{(1)}(\lambda^{-1} y^{\mu})$, en un entorno de p.

2) Unicidad local de la solucion:

Dados datos inciales ($h_{ab,}$, K_{ab}) en una variedad Σ.

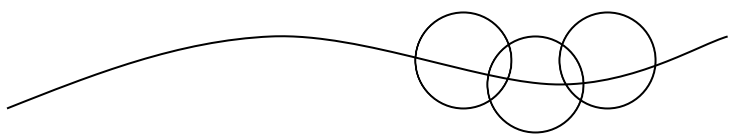
Sea $(O^H, g_{ab}{}^H)$, a solución a las ecuaciones de Einstein usandno coordenadas harmonicas a partir de los datos $[g_{\mu\nu}, (\partial g_{\mu\nu}/\partial t)]$ como hicimos antes. Sea (O, g_{ab}) otra solucion) no necesariamente en coordenadas harmonicas) cubriendo la misma region de Σ (nos interesara la interseccion de las dos, es decir consideramos un p en Σ cubierto por las dos). Queremos argumentar que existe un difeomorfismo ψ de un entorno U^H de p en O^H a un enrtorno U de p en O tal que $\psi^* (g_{ab}) = g_{ab}{}^H$

Dado que las dos meticas inducen la misma metrica en Σ existe un difeomorfismo $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que las componenetes coordenadas de las metrica inducíada por $\phi^* g_{ab}$ y sus derivadas respecto a t coniciden con las $[g_{\mu\nu}, (\partial g_{\mu\nu}/\partial t)]$. Usamos entonces ϕ para traer las coordenads de $O^H \cap \Sigma$ a $O \cap \Sigma$ A partir de estas y los datos iniciales construimos una solucion en O y coordenadas armonicas en O segun el procedimiento de la clase pasada. Definimos entonces a ψ como el mapeo que lleva puntos con ciertas coordenadas en O al punto con los mismos valores de las coordenadas en O^H. (Esto pordia solo functionar en entornos mas chicos U & U^H). El punto es que en este entorno $U^{H,}$ tendremos que las coordenadas armonicas de $\psi^* (g_{ab})$ satifsaceran la ecuación de evolución:

$$R_{\mu\nu}{}^H = -1/2 \, \Sigma_{\alpha\beta} \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\beta \partial_\alpha \, g_{\mu\nu} + F'_{\mu\nu}(g, \partial g) = 0$$

con los datos iniciales $[g_{\mu\nu}, (\partial g_{\mu\nu}/\partial t)]$ (cuidado, en realidad alli hubo una elección arbitaria que habria que ajustar para asugrar que los datos iniciales cioincidan), pero como la solucion es única tendremos que $\psi^* (g_{ab})= g_{ab}{}^H$

3) Gloabalizacion de la solución y su unicidad.
En 1) argunentamos que para todo p en Σ existe una solucion en un entorno O de p en $\Sigma\times\Re$ en el que hay una solucion (g_{ab}, O) que concuerda con los datos iniciales en $O\cap\Sigma$ Ahora consideramos el recubrimento de Σ por todos los abiertos $U_\alpha = O_\alpha\cap\Sigma$ Como Σ es paracompacto existe un surrecubrimento localmente finito $[U_\beta]_{\beta\in I}$(cada punto esta recubierto por un numero finito de abiertos del subrrecubrimento). En las intersecciones de los U_β, se puede ajustar (un numero finito de operaciones locles) mediante difeomorfismos las O_α soluciones para que encajen. De esta manera se construye una solucion en un entorno de $\Sigma\times\Re$ que contiene a Σ



4)Maxima Evolución de Cauchy:
La construcción en anterior nos da una solución en un entorno de la hipersuperficie inicial, pero es claro que podría haber soluciones en otros entornos de esta. Buscamos La máxima.

Repaso de Teoría de Conjuntos: Relaciones de Orden, El Lema de Zorn y el Axioma de elección.

Dado un conjunto A una relación R en A es un subconjunto $R \subset A{\times}A$. Dados $x, y \in A$, diremos
$x\,Ry \Leftrightarrow (x,y) \in R$.

Definición :Un orden parcial $\geq$ en A es una relación de tal que:

i) $\forall\, x\in A,\ x\geq x$
ii) $\forall\, x, y, z \in A,\ x\geq y\ \&\ y\geq z \Rightarrow x\geq z$
iii) $\forall\, x, y, \in A,\ x\geq y\ \&\ y\geq x \Rightarrow x=y$

Definición: Un subconjunto $T\subset A$ se dirá Totalmente Ordenado, si $\forall\, x, y, \in T$ se tiene, ó $x\geq y$ ó bien $y\geq x$.

Definición: Una cota superior de T, es un $b \in A$ tal que $b \geq x,\ \forall\, x \in T$,

Lema de Zorn:
Sea S un conjunto con un orden parcial $\geq$, tal que todo subconjunto $T\subset S$ que es totalmente ordenado tiene una coata superior, $\Rightarrow S$ tiene un elemento maximal. (Es decir , $\exists m \in S$ tal que si $\exists n \in S\ n\geq m, \Rightarrow n=m$.

Nota, el elemento maximal no tiene por que ser único, y en general no lo es. Dos elementos maximales simplemente no están relacionados por la relación de orden.

Axioma de elección.

En nuestro caso considermos S el conjunto de todos los espacios glaobalmente hiperbolicos (modulo difeomorfismos), que son soluciones de la ecuación de Einstein, y en los cuales la hipersuperficie Σ con los datos iniciales puede ser encajada como hipersuperficie de Cauchy. Dados $(M^{(1)}, g_{ab}{}^{(1)}), (M^{(2)}, g_{ab}{}^{(2)}) \in S$ definimos $(M^{(1)}, g_{ab}{}^{(1)}) \geq (M^{(2)}, g_{ab}{}^{(2)})$, si existe una isometría $\chi\ M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$ que lleva Σ a Σ.

i) Esta es una relación de orden parcial.
ii) Dado un conjunto $T \subset S$ $(M^{(b)}, g_{ab}{}^{(b)})$ mediante la inion de los M´s y la concatenación de las g_{ab}' ajustadas por la isometrías. Es claro que esta es una cota superior de T.

El lema de Zorn garantiza la existencia de un elemento maximal. En este caso es fácil ver que no puede haber sino uno: Si ningún conjunto contiene al otro, el aumentamos a uno lo que le falta del otro obteniendo un elemento mas grande, en contradicción con la maximalidad.

Todo esto se resume en el siguiente teorema (sorprendentemente fuerte).

Teorema 10.2.2. Sea Σ una variedad 3-dimensional suave, sean (h_{ab}, K_{ab}) datos iniciales suaves que satisfacen las ligaduras. $\Rightarrow$ existe un unico espacio-tiempo $(M\ ,\ g_{ab})$ denominado La máxima Evolución de Cauchy de los datos iniciales (Σ, h_{ab}, K_{ab}) que satisface:

1) Es solución de las Ec de Einstein en el vacío.
2) Es globalmente hiperbólico con superficie de Cauchy Σ
3) La métrica inducida y la curvatura extrínseca en Σ son h_{ab} y K_{ab}.
4) Todo otro espacio-tiempo satisfaciendo i), ii),y iii) se puede mapear isomorficamente a $(M\ ,\ g_{ab})$.

Aparte se tiene:

5) Sea $(\Sigma\ ,\ h_{ab}\ ,\ K_{ab})$ y $(\Sigma',\ h'_{ab}\ ,\ K'_{ab})$ datos iniciales, y $S \subset \Sigma$, $S' \subset \Sigma'$, y $\varphi : S \to S'$ un diefeomorfismo que lleva $(h_{ab}, K_{ab})|S$ a $(h'_{ab}, K'_{ab})|S'$. $\Rightarrow$

$(D(S), g_{ab})$ es isométrico a $(D(S'),\ g'_{ab})$

6) La solución global depende continuamente de los datos iniciales en las normas de Sobolev correspondientes.

Nota1): Es posible obtener espacio-tiempos mas grandes que La Evolución maximal de Cauchy. En esos caso simplemnete la hipersuperficie Σ no es superficie de

Cahchy. El Agujeros negros cargados, y Anti-deSitter.

Nota 2): Un aspecto importante de este teorema es que nos da un mapeo entre datos iniciales y espacio-tiempos globalmente hiperbólicos. Claramenete a unos datos iniciales le corresponde un espaciotiempo único, pero es claro que un mismo espacio-tiempo puede resultar de distintos datos iniciales. Hay aspectos de un espacio-tiempo que se pueden estudiar mas facilmente en terminos de su representación como datos iniciales.

El problema de encontrat datos iniciales.
Consite ne hallar pares ($h_{ab,,}K_{ab}$) en una variedad Σ, que satisfagan las ligaduras:

$$D_a K_b{}^a - D_b K_a{}^a = 0$$

$$(1/2)[\,{}^{(3)}R + (K_a{}^a)^2 - K_b{}^a K_a{}^b] = 0$$

Esto no es un problema trivial.

Pero hay un metodo muy poderoso si nos limitamos a superficies maximales (Es decir que tienen $K_a{}^a=0$).
El método es el siguiente (Lichnerowicz & York).

1) Dada Σ, se escoge h_{ab} de manera arbitaria.
2) Se escoge K_{ab} sin traza y solución de $D_a K_b{}^a=0$ (esta es una ec. solo para $K_b{}^a$ pues D se conoce)
3) Definimos $h'_{ab} = \phi^4 h_{ab}$
4) Sea D'_a el operador derivada compatible con h'_{ab}
5) Definimos $K'_{ab} = \phi^{-2} K_{ab}$
6) Entonces $D'_a K'_b{}^a=0$

7) La ligadura Hamiltoniana para (h'_{ab},K'_{ab}) se convierte en una ecuación para ϕ:

$$D^a D_a \phi -(1/8) R \phi + (1/8) \phi^{-7} K_{ab} K^{ab}=0$$

Tarea leer apendice D y Chequear 6 y 7.

Una eleccion particularmente simple es considerar un momento de simetría ante inversión temporal $K_{ab} =0$.
En ese caso la ecuación para el factor ϕ, es muy simple:

$$D^a D_a \phi -(1/8) R \phi =0$$

Si la métrica especial es plana tenemos.

$$\partial^a \partial_a \phi =0$$ La ec de Lapace!!

La solución $\phi = 1+M/r$ da datos iniciales para Schwarzchild y la superposicion de varias de estas dan datos iniciales para un conjunto de agujeros negros, (inicialmente estaticos!).

Como vimos, dada Σ una hipersuperficie, g_{ab} la métrica del espacio-tiempio inducida en esta una métrica h_{ab} dada por $h_{ab}=g_{ab} + n_a n_b$, la cual claramente da lugar a un único operador derivada D_a sin torsión compatible con h_{ab} en Σ. También tenemos un proyector $h^a{}_b = \delta^a{}_b + n^a n_{b.}$ Esto permite ver a un tensor $T^{ab\ldots}{}_{cd..}$ sobre M como

$$(1/2)[\,{}^{(3)}R + (K_a{}^a)^2 - K_b{}^a K_a{}^b] = 0$$

que tampoco tiene la forma de ecuación de evolución sino de limitante o “constraint” sobre los datos iniciales.