

Volviendo a las ecuaciones de evolución (Ec de Einstein en el vacío) podemos imaginar que tomamos coordenadas x^μ en M y queremos ver las ecuaciones para $g_{\mu\nu}$. Como nos dan datos iniciales en Σ escogemos las coordenadas de modo que $x^0=t$ sea tal que $t=0$ corresponda a Σ
 (¿ por que se puede hacer esto?)

Simplemente haciendo la cuenta obtenemos que

$$R_{\mu\nu} = -1/2 \Sigma_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} [-2\partial_\beta \partial_{(\nu} g_{\mu)\alpha} + \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}] + F_{\mu\nu} (g, \partial g)^*$$

de modo que

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2) R g_{\mu\nu} = (-1/2) \Sigma_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} [-2\partial_\beta \partial_{(\nu} g_{\mu)\alpha} + \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}] + (1/2) \Sigma_{\alpha\beta\rho\sigma} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} [-\partial_\beta \partial_\rho g_{\sigma\alpha} + \partial_\beta \partial_\alpha g_{\rho\sigma}] + L_{\mu\nu} (g, \partial g)$$

Tarea 1 verificar las expresiones de arriba y calcular explícitamente la forma de F y L.

El punto es que estas ecuaciones no son de tipo diagonal hiperbolico.

De hecho ya sabemos que de estas 10 ecuaciones 4 son constricción y no ecuaciones de evolucion. Como hay en principio 10 incognitas $g_{\mu\nu}$ el sistema es subdeterminado. no puede tener solución única.

Esto lo entendemos como asociado a la libertad de norma. Que en nuestro caso tiene que ver con la invariancia ante

difeomorfismos. Como sabemos, si tenemos un espaciotiempo (M, g_{ab}) y un difeomorfismo (mapeo biyectivo suave con inversa suave)

$\phi: M \rightarrow M$, entonces $(M, \phi^* g_{ab})$ representan el mismo espacio-tiempo. El punto es que si imaginamos dados los datos iniciales en Σ y una solución (M, g_{ab}) a la ecuación coincidiendo con dichos datos y ahora consideramos un difeomorfismo que coincide con la identidad en un entorno de Σ es claro que tendremos en $(M, \phi^* g_{ab})$ otra solución que satisface los datos iniciales.

Esto usualmente se describe en terminos de cambio de coordenadas, pero veamos la relación entre la descripción de arriba y la usual.

Para esto sera útil denotar a la imagen del difeomorfismo com M' (aunque en verdad M y M' coincidan, de hecho sabemos que dos variedades difeomorfas son la misma variedad abstracta).

Consideremos

$$\text{Id}: M \rightarrow M'$$

$$\phi: M \rightarrow M'$$

Dada una carta coordenada de M

$$\varphi: M \rightarrow \mathcal{R}^n \quad \forall p \in M, \quad x^\mu(p) = \Pi^\mu(\varphi(p))$$

Podemos considerar ahora dos cartas en M'

$$1) \quad \forall q \in M', \quad x^\mu(q) = \Pi^\mu(\varphi(\text{Id}^{-1}(q)))$$

y

$$2) \quad \forall q \in M', \quad y^\mu(q) = \Pi^\mu(\varphi(\phi^{-1}(q)))$$

Dado un campo tensorial $T^{ab..}_{cd..}$ en M , definimos dos en M'

a) $\text{Id}^* (T^{ab..}_{cd..})$

y

b) $\phi^* (T^{ab..}_{cd..})$

Tarea 2:

Considere como son las componentes de los tensores a y b de en las cartas 1 y 2.

Dadas unas coordendas en M , y las components de g_{ab} y $g_{ab}' = \phi^* g_{ab}$ estan relacionadas por

$$g_{\mu\nu} = g_{ab} (\partial / \partial x^\mu)^a (\partial / \partial x^\nu)^b$$

$$g_{\mu\nu}' = (\phi^* g_{ab}) (\partial / \partial x^\mu)^a (\partial / \partial x^\nu)^b =$$

$$g_{ab} (\phi^* (\partial / \partial x^\mu)^a) (\phi^* (\partial / \partial x^\nu)^b) =$$

que coincide con un simple cambio de coordenadas determinado por “ $y = \phi(x)$ ”, mas pracisamente “ $y^\mu = \Pi^\mu(\phi(x))$ ”. **Que quiere decir exactamente?**

Asi que $g_{\mu\nu}' = g_{ab} (\partial / \partial y^\mu)^a (\partial / \partial y^\nu)^b$

El punto es que si imaginamos dados los datos iniciales en coordenadas x y una solucion a la ecuación coincido con los datos y ahora consideramos un difeomorfismo que coincide con la identidad en un entorno de Σ es claro que tendremos otra solucion que satisface los datos iniciales y difiere de la inicial por un cambio de coordnads que es la identidad en en entorno de Σ .

Ahora como un cambio de coordenadas esta caracterizado por 4 funciones suaves pero arbitrarias

$$y^\mu = f^\mu(x)$$

cabe esperar que estas permitan dar las $10-6=4$ condiciones que faltan para que el sistema pueda quedar bien determinado.

Esto es lo analogo a la eleccion de la condicion de norma en las ecuaciones de Maxwell (Alli usamos, en el caso vacio, la norma de Lorentz).

Aca, en analogía usaremos una condición de norma denominada condición de coordenadas armonicas, para esto definimos :

Def :

$$H^\mu = \nabla^a \nabla_a x^\mu$$

La condición de norma armonica sobre las coordendas es

$$H^\mu = 0 \quad **$$

Veamos como se construyen coordenadas que satisfagan esta condición de norma. Digamos que en una región de un espacio-tiempo dado (M, g_{ab}) tenemos coordendas y^μ que no son armonicas. Consideramos una hipersuperficie Σ en el espacio-tiempo y consiermos las ecuaciones $**$ como ecuaciones de evolución para los campos x^μ . Estas tienen una solucion única si damos condiciones iniciales en Σ . Tomamos estos como $(x^\mu = y^\mu, n^a \nabla_a x^\mu = n^a \nabla_a y^\mu)$ en Σ . El punto es que en un cierto entorno estos campos servirán como coordenadas en M que por construcción satisfacen la norma armonica. Esto sucedera en las regiones en que los $\nabla_a x^\mu$ sean vectores independientes, y esto a su vez ocurre en donde el determinate de sus components (en cualquier carta coordenada, pero en particular en la y^μ) tenga

determinante distinto de cero. El punto es que como las y^μ son buenas coordenadas, las $\nabla_a y^\mu$ tienen determinante distinto de cero, pero, como en Σ , las $\nabla_a x^\mu$ y las $\nabla_a y^\mu$ coinciden, el determinante de las componentes de $\nabla_a x^\mu$ es distinto de cero en Σ . Pero como las componentes de $\nabla_a x^\mu$ son funciones suaves, también lo es su determinante, entonces existe un entorno de Σ en que este es distinto de cero y en ese entorno las x^μ son buenas coordenadas, que satisfacen la norma armónica.

Tarea 3: chequer que la definicion H^μ es explicitamente:

$$H^\mu = \Sigma_\alpha [\partial_\alpha g^{\alpha\mu} + (1/2) g^{\alpha\mu} \Sigma_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_\alpha g_{\rho\sigma}]$$

Esta ecuacion permite expresar las segundas derivadas molestas de la ecuación * y reemplazarlas por derivadas de primer orden

De hecho

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_\nu) H^\alpha &= \\ \Sigma_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_\nu) \Sigma_\beta [\partial_\beta g^{\beta\alpha} + (1/2) g^{\beta\alpha} \Sigma_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_\beta g_{\rho\sigma}] &= \\ = \Sigma_\alpha g_{\alpha(\mu} \Sigma_\beta [\partial_\nu \partial_\beta g^{\beta\alpha} + (1/2) \partial_\nu (g^{\beta\alpha} \Sigma_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_\beta g_{\rho\sigma})] &= \\ = \Sigma_\alpha g_{\alpha(\mu} \Sigma_\beta [\partial_\nu \partial_\beta g^{\beta\alpha} + (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [(\partial_\nu g^{\beta\alpha}) g^{\rho\sigma} \partial_\beta g_{\rho\sigma} + & \\ g^{\beta\alpha} (\partial_\nu g^{\rho\sigma}) \partial_\beta g_{\rho\sigma} + g^{\beta\alpha} g^{\rho\sigma} \partial_\nu \partial_\beta g_{\rho\sigma}]] &= \\ = \Sigma_{\alpha\beta} g_{\alpha(\mu} \partial_\nu) \partial_\beta g^{\beta\alpha} + (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [\Sigma_{\alpha\beta} g_{\alpha(\mu} (\partial_\nu g^{\beta\alpha}) g^{\rho\sigma} \partial_\beta g_{\rho\sigma} + & \\ \partial_\nu g^{\rho\sigma} \partial_\mu g_{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma} \partial_\nu \partial_\mu g_{\rho\sigma}] &= \\ = (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [g^{\rho\sigma} \partial_\nu \partial_\mu g_{\rho\sigma} + 2 g_{\rho(\mu} \partial_\nu) \partial_\sigma g^{\sigma\rho}] & \\ + (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [\Sigma_{\alpha\beta} g_{\alpha(\mu} (\partial_\nu g^{\beta\alpha}) g^{\rho\sigma} \partial_\beta g_{\rho\sigma} + \partial_\nu g^{\rho\sigma} \partial_\mu g_{\rho\sigma}] & \\ = (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [g^{\rho\sigma} \partial_\nu \partial_\mu g_{\rho\sigma} + 2 g_{\rho(\mu} \partial_\nu) \partial_\sigma g^{\sigma\rho}] + J(g, \partial g) & \end{aligned}$$

Ahora $0 = \partial_\alpha (\delta_\rho^\nu) = \partial_\alpha (g_{\sigma\rho} g^{\sigma\nu}) = g_{\sigma\rho} \partial_\alpha g^{\sigma\nu} + \partial_\alpha (g_{\sigma\rho}) g^{\sigma\nu}$
de modo que $\partial_\alpha g^{\mu\nu} = - g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} \partial_\alpha (g_{\sigma\rho})$

asi que tenemos $\partial_\alpha g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} \partial_\alpha (g_{\mu\nu})$ o sea $\partial_\sigma g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\alpha} g^{\rho\beta} \partial_\sigma (g_{\alpha\beta})$

asi que obtenemos

$$\begin{aligned} & \Sigma_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha = \\ & (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [g^{\rho\sigma} \partial_{(\nu} \partial_{\mu)} g_{\rho\sigma} - 2g_{\rho(\mu} \partial_{\nu)} (g^{\sigma\alpha} g^{\rho\beta} \partial_\sigma (g_{\alpha\beta}))] + J_{\mu\nu}(g, \partial g) = \\ & (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [g^{\rho\sigma} \partial_{(\nu} \partial_{\mu)} g_{\rho\sigma} - 2g^{\sigma\alpha} \partial_{(\nu} \partial_{\sigma} g_{\mu)\alpha}] + J_{\mu\nu}'(g, \partial g). \end{aligned}$$

Asi que definiendo $R_{\mu\nu}^H$ como la suma $R_{\mu\nu} + \Sigma_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha$ tenemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^H &= \\ & -1/2 \Sigma_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} [-2\partial_\beta \partial_{(\nu} g_{\mu)\alpha} + \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}] + F_{\mu\nu}(g, \partial g) \\ & + (1/2) \Sigma_{\rho\sigma} [g^{\rho\sigma} \partial_{(\nu} \partial_{\mu)} g_{\rho\sigma} - 2g^{\sigma\alpha} \partial_{(\nu} \partial_{\sigma} g_{\mu)\alpha}] + J_{\mu\nu}'(g, \partial g). \\ & = -1/2 \Sigma_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu} + F'_{\mu\nu}(g, \partial g) \end{aligned}$$

El punto es que una vez más la ecuación $R_{\mu\nu}^H = 0$, aunque no es la ecuación de evolución correcta, tiene la forma apropiada de modo que el teorema 10.1.3 garantiza que tiene buena formulación de valores iniciales (en el sentido local y restringido de 10.1.3)

Veamos entonces el método (análogo a la construcción llevada a cabo en el caso de Maxwell) para obtener la formulacion apropiada del problema de datos iniciales:

Supongamos entonces que tenemos datos iniciales dados por (h_{ab}, K_{ab}) en una variedad Σ , tales que satisfacen las ligaduras Hamiltoniana y de Momento. Escogemos coordenadas x^i en Σ , y sean $h_{\mu\nu}$ y $K_{\mu\nu}$ las componentes respectivas. Nos interesara construir las soluciones $g_{\mu\nu}$ a las

ecuaciones *******. Para esto identificamos $g_{\mu\nu}(x, t=0) = h_{\mu\nu}$ para $\mu, \nu = 1, 2, 3$. Escogemos (por ejemplo) $g_{00}(x, t=0) = 1$ y $g_{0i}(x, t=0) = 0$, y ponemos $(\partial g_{\mu\nu}/\partial t)(x, t=0) = K_{\mu\nu}$ para $\mu, \nu = 1, 2, 3$.

Tarea 4: Verificar que esta asignación coincide con la expresión 10.2.13.

Notamos que esta especificación no determina $(\partial g_{0\nu}/\partial t)(x, t=0)$ para $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Así que escogemos las cantidades $(\partial g_{0\nu}/\partial t)(x, t=0)$ de modo que $H^\alpha = 0$ sobre Σ .

Tarea 5: exprese esta condición en términos de los datos iniciales y vea que puede escoger las cantidades mencionadas de modo que esto se satisfaga.

Tenemos entonces datos iniciales $g_{\mu\nu}(x, t=0)$ y $(\partial g_{\mu\nu}/\partial t)(x, t=0)$ para $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Con estos, el teorema **10.1.3** nos garantiza una solución única y bien portada del sistema de ecuaciones $R_{\mu\nu}^H = 0$.

Llamemos a esta $g_{\mu\nu}(x, t)$.

El problema es que este no es el sistema de ecuaciones de movimiento correcto. Sin embargo si la solución satisface $H^\alpha = 0$, automáticamente satisface $R_{\mu\nu} = 0$ que si es el sistema correcto.

El punto es que por construcción $H^\alpha = 0$ en Σ . Tenemos que chequear **a)** ¿que ec. de evolución satisface? y **b)** ¿cual es el valor de $\partial H^\alpha/\partial t$ en Σ ?.

El primer punto emerge de la identidad de Bianchi. Esta es una identidad algebraica que no depende de si se satisfacen o no las ecuaciones de movimiento, simplemente, para toda métrica se tiene que $\nabla^a G_{ab} = 0$.

Es decir que la $g_{\mu\nu}(x,t)$ arriba obtenida satisface

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0.$$

Ahora, es claro que podemos despejar

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^H - \sum_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha$$

y entonces

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu}^H - \sum_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha) = R^H - \sum_\alpha \partial_\alpha H^\alpha$$

Así que

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu} R \\ &= R_{\mu\nu}^H - (1/2)g_{\mu\nu} R^H - \sum_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha + (1/2)g_{\mu\nu} \sum_\alpha \partial_\alpha H^\alpha \end{aligned}$$

Calculamos ahora $\nabla^\mu G_{\mu\nu}$ tomando en cuenta que $g_{\mu\nu}$ es solución de $R_{\mu\nu}^H = 0$. Como digimos el resultado es automáticamente 0 así que:

$$\nabla^\mu (\sum_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha - (1/2)g_{\mu\nu} \sum_\alpha \partial_\alpha H^\alpha) = 0$$

Definimos ahora

$$S_{\mu\nu} = \sum_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha - (1/2)g_{\mu\nu} \sum_\alpha \partial_\alpha H^\alpha$$

De modo que nuestra ecuación es

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^\mu S_{\mu\nu} = g^{\mu\beta} \partial_\beta S_{\mu\nu} - g^{\mu\beta} [\Gamma_{\beta\nu}^\alpha S_{\mu\alpha} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha S_{\nu\alpha}] \\ &= (1/2) \sum_\alpha g^{\mu\beta} \partial_\beta [g_{\alpha\mu} \partial_\nu H^\alpha + g_{\alpha\nu} \partial_\mu H^\alpha - g_{\mu\nu} \partial_\alpha H^\alpha] + r(g, H, \partial H) \\ &= (1/2) \sum_\alpha g^{\mu\beta} [g_{\alpha\mu} \partial_\beta \partial_\nu H^\alpha + g_{\alpha\nu} \partial_\beta \partial_\mu H^\alpha - g_{\mu\nu} \partial_\beta \partial_\alpha H^\alpha] + r'(g, H, \partial H) \\ &= (1/2) \sum_\alpha [\partial_\alpha \partial_\nu H^\alpha + g^{\mu\beta} g_{\alpha\nu} \partial_\beta \partial_\mu H^\alpha - \partial_\nu \partial_\alpha H^\alpha] + r'(g, H, \partial H) \end{aligned}$$

O sea

$$0 = (1/2) \sum_\alpha g^{\mu\beta} g_{\alpha\nu} \partial_\beta \partial_\mu H^\alpha + r'_\nu(g, H, \partial H)$$

Aca notamos que los r'_ν son funciones homogéneas de H y sus primeras derivadas. Multiplicando esta ecuación por $2g^{\nu\lambda}$ obtenemos

$$g^{\mu\beta} \partial_\beta \partial_\mu H^\lambda + 2g^{\nu\lambda} r'_\nu(g, H, \partial H) = 0$$

El punto es que esta ecuación es del tipo cubierto por el

teorema 10.1.3, así que dados datos iniciales tiene una solución única.

Veamos ahora los datos iniciales faltantes.

Recordemos que nuestros datos iniciales en Σ satisficían las ligaduras $G_{ab} n^a h^b = 0$ y $G_{ab} n^a n^b = 0$

Lo que quiere decir que $G_{ab} n^a = 0$ y en nuestras coordenadas $G_{\mu\nu} n^\mu = 0$.

Pero esto es

$$0 = n^\mu G_{\mu\nu} = n^\mu [R_{\mu\nu}^H - (1/2)g_{\mu\nu}R^H - \sum_\alpha g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha + (1/2)g_{\mu\nu} \sum_\alpha \partial_\alpha H^\alpha]$$

Ahora en nuestro caso $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ por lo cual y dado que como $R_{\mu\nu}^H = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \sum_\alpha n^\mu [g_{\alpha\mu} \partial_\nu H^\alpha + g_{\alpha\nu} \partial_\mu H^\alpha - g_{\mu\nu} \partial_\alpha H^\alpha] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_\alpha [g_{\alpha 0} \partial_\nu H^\alpha + g_{\alpha\nu} \partial_0 H^\alpha - g_{0\nu} \partial_\alpha H^\alpha] = \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\nu H^0 + g_{0\nu} \partial_0 H^0 + g_{i\nu} \partial_0 H^i - g_{0\nu} (\partial_0 H^0 + \partial_i H^i)] = \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\nu H^0 + g_{0\nu} \partial_0 H^0 + g_{i\nu} \partial_0 H^i - g_{0\nu} \partial_0 H^0] = \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\nu H^0 + g_{i\nu} \partial_0 H^i] \end{aligned}$$

En el caso $\nu=0$ obtenemos directamente $\partial_0 H^0 = 0$

En el caso $\nu=j$ dado que $\partial_j H^0 = 0$ puesto que los H^α se anulan sobre Σ obtenemos $\partial_0 H^j = 0$.

Es decir los H^α tienen valores iniciales cero en Σ , y es claro que $H^\alpha = 0$ satisface la ecuación diferencial y estos datos iniciales, pero como la solución es única, esa tiene que ser LA solución.

Dado que $H^\alpha=0$ nuestra $g_{\mu\nu}(x,t)$ es solución de la ecuación de evolución correcta.

Como vimos, dada Σ una hipersuperficie, g_{ab} la métrica del espacio-tiempo inducida en esta una métrica h_{ab} dada por $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$, la cual claramente da lugar a un único operador derivada D_a sin torsión compatible con h_{ab} en Σ . También tenemos un proyector $h^a_b = \delta^a_b + n^a n_b$. Esto permite ver a un tensor $T^{ab\dots cd\dots}$ sobre M como

$$(1/2)[{}^{(3)}R + (K_a^a)^2 - K_b^a K_a^b] = 0$$

que tampoco tiene la forma de ecuación de evolución sino de limitante o “constraint” sobre los datos iniciales.

