

Clase 10

Relaciones de Gauss Codacci

- Como vimos, dada Σ una hipersuperficie, g_{ab} la métrica del espacio-tiempo inducida en esta una métrica h_{ab} dada por $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$, la cual claramente da lugar a un único operador derivada D_a sin torsión compatible con h_{ab} en Σ . También tenemos un proyector $h^a_b = \delta^a_b + n^a n_b$.
- Esto permite ver a un tensor $T^{ab...}_{cd..}$ sobre M como un tensor sobre Σ , si satisface:

- $$* T^{ab...}_{cd..} = h^a_e h^b_f .. h^c_h h^d_i .. T^{ef...}_{hi..}$$

- Por otro lado dado un tensor $T^{ab...}_{cd..}$ sobre Σ , este define automáticamente define un un tensor M , que satisface $*$, es decir que contraído en cualquiera de sus índices con n^a ó n_a da 0.

Nos interesa la relación entre D_a y ∇_a . Notemos que si tenemos un campo tensorial $T^{ab\dots}_{cd\dots}$ sobre Σ , y el correspondiente campo tensorial sobre M y quisieramos calcular $\nabla_e T^{ab\dots}_{cd}$ no podríamos hacerlo pues al no tener el campo definido afuera de Σ , no podríamos considerar como varia en direcciones que nos sacan de Σ . Sin embargo si podriamos definir como varia el campo en direcciones tangente a Σ , lo que nos permitiría hablar de $v^e \nabla_e T^{ab\dots}_{cd}$ para v^e tangente a Σ . Es decir que estaría bien definido $h^e_f \nabla_e T^{ab\dots}_{cd}$, que sin embargo no necesariamente satisfacería la condición *. Pero claramente podemos ahora proyectar todos sus indices con h^a_b , lo que generaría un tensor sobre Σ . Esta construcción se caracteriza por

Lema 10.2.1:

- $D_g T^{ab\dots}_{cd} = h^l_g h^a_e h^b_f \dots h^h_c h^i_d \dots \nabla_l T^{ef\dots}_{hi\dots}$

Demostación: Consideramos el operador D'_g definido como

$$D'_g T^{ab\dots cd} = h^l_g h^a_e h^b_f \dots h^h_c h^i_d \dots \nabla_l T^{ef\dots hi\dots}$$

Es claro que satisface:

- 1) Linealidad
- 2) Regla de Leibnitz
- 3) Conmutatividad con la contracción de índices
- 4) Para todo para v^e tangente a Σ y toda función suave f sobre Σ , tenemos $v^g D'_g f = v^g h^l_g \nabla_l f = v^l \nabla_l f = v(f)$.

$$\bullet \quad 5) \quad D'_a D'_b f - D'_b D'_a f = D'_a (h^m_b \nabla_m f) - (a \leftrightarrow b) =$$

$$h^l_a h^c_b \nabla_l (h^m_c \nabla_m f) - (a \leftrightarrow b) =$$

$$h^l_a h^m_b \nabla_l (\nabla_m f) + h^l_a h^c_b \nabla_l (h^m_c) \nabla_m f - (a \leftrightarrow b) = h^l_a h^c_b \nabla_l (h^m_c) \nabla_m f - (a \leftrightarrow b)$$

Pero

$$h^l_a h^c_b \nabla_l (h^m_c) = h^l_a h^c_b \nabla_l (n^m n_c) = h^l_a h^c_b n^m \nabla_l (n_c) = h^c_b n^m K_{ac} = n^m K_{ab}$$

$$\text{De modo que } D'_a D'_b f - D'_b D'_a f = n^m K_{ab} \nabla_m f - (a \leftrightarrow b) = 0$$

Esto demuestra que D'_a es un operador **derivada**

- Veamos ahora como actua sobre la métrica:
- $D'_c (h_{ab}) = h^l_c h^d_a h^e_b \nabla_l (h_{de}) = h^l_c h^d_a h^e_b \nabla_l (n_d n_e) =$

$$h^l_c h^d_a h^e_b [n_d \nabla_l (n_d) + \nabla_l (n_d) n_e] = 0.$$

Es, decir D'_a es un operador derivada, pero este es único asi que $D'_a = D_a$. ♦

- Este operador derivada da lugar a su vez al tensor de Riemann de Σ , para calcularlo consideramos una 1 forma w_a sobre Σ y recordamos la definición:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d w_d = D_a D_b w_c - D_b D_a w_c$$

Pero

$$D_a D_b w_c = D_a (h^d_c h^l_b \nabla_l w_d) = h^g_a h^e_b h^f_c \nabla_g (h^d_f h^l_e \nabla_l w_d) =$$

$$h^g_a h^e_b h^f_c h^d_f h^l_e \nabla_g \nabla_l w_d + h^g_a h^e_b h^f_c [h^d_f \nabla_g (h^l_e) + \nabla_g (h^d_f) h^l_e] \nabla_l w_d =$$

$$h^g_a h^d_c h^l_b \nabla_g \nabla_l w_d + [h^g_a h^e_b h^d_c \nabla_g (h^l_e) + h^g_a h^f_c \nabla_g (h^d_f) h^l_b] \nabla_l w_d =$$

$$h^g_a h^d_c h^l_b \nabla_g \nabla_l w_d + [h^d_c K_{ab} n^l + K_{ac} n^d h^l_b] \nabla_l w_d$$

Entonces

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d w_d = h^g_a h^d_c h^l_b \nabla_g \nabla_l w_d + [h^d_c K_{ab} n^l + K_{ac} n^d h^l_b] \nabla_l w_d - (a \leftrightarrow b) =$$

$$h^g_a h^d_c h^l_b (\nabla_g \nabla_l w_d - \nabla_l \nabla_g w_d) + [K_{ac} n^d h^l_b \nabla_l w_d - (a \leftrightarrow b)]$$

Ahora

$$\nabla_g \nabla_l w_d - \nabla_l \nabla_g w_d = R_{gld}{}^f w_f$$

Y por otro lado

$$n^d h^l_b \nabla_l w_d = h^l_b [\nabla_l (n^d w_d) - \nabla_l (n^d) w_d] = h^l_b [\nabla_l (0) - g^{df} \nabla_l (n_f) w_d] =$$

$$- h^l_b g^{df} K_{lf} w_d = - K_b{}^d w_d$$

- Así que encontramos:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d w_d = h_a^g h_c^d h_b^l R_{gld}{}^f w_f - K_{ac} K_b{}^f w_f + K_{bc} K_a{}^f w_f$$

Como esto es válido para toda 1 forma w_a sobre Σ tendremos:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a^g h_c^e h_b^l R_{gle}{}^f h_f^d - K_{ac} K_b{}^f h_f^d + K_{bc} K_a{}^f h_f^d$$

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a^g h_c^e h_b^l R_{gle}{}^f h_f^d - K_{ac} K_b{}^d + K_{bc} K_a{}^d \quad **$$

De igual manera : (tarea Problema 4) se obtiene:

$$D_a K_b{}^a - D_b K_a{}^a = R_{cd} n^d h_b^c \quad **$$

- Estas ****** son las relaciones de Gauss Codacci

Como habiamos mencionado consideraremos los datos iniciales en Σ como (h_{ab}, K_{ab}) .

Consideremos ahora las ecuaciones de Einstein en el vacio:

$$G_{bc} = R_{bc} - (1/2)g_{bc}R = 0$$

- Contrayendo con $n^c h^b_a$ obtenemos:

$$0 = n^c h^b_a (R_{bc} - (1/2)g_{bc}R) = n^c h^b_a R_{bc} = D_b K_a^b - D_b K_a^a$$

Vemos que esta no tiene la forma de ecuación de evolución sino de limitante o “constraint” sobre los datos iniciales.

Por otro lado

$$\begin{aligned} R_{abcd} h^{ac} h^{bd} &= R_{abcd} (g^{ac} + n^a n^c)(g^{bd} + n^b n^d) = R + 2R_{ac} n^a n^c \\ &= (-Rg_{cc} + 2R_{ac}) n^a n^c = 2(R_{ac} - (1/2)g_{cc} R) n^a n^c = 2 G_{ac} n^a n^c \end{aligned}$$

- Pero ahora usamos la primera relación de GC y contraemos **b** y **d**

- $${}^{(3)}R_{ac} = h_a^g h_c^e h_b^l R_{gle}^f h_f^b - K_{ac} K_b^b + K_{bc} K_a^b =$$

$$h_a^g h_c^e h_f^l R_{gle}^f - K_{ac} K_b^b + K_{bc} K_a^b$$

y finalmente contraemos con h^{ac} obteniendo

- $$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= h^{ac} h_a^g h_c^e h_f^l R_{gle}^f - K_a^a K_b^b + K_b^a K_a^b \\ &= h^{ge} h_f^l R_{gle}^f - (K_a^a)^2 + K_b^a K_a^b \\ &= h^{ge} h_f^l R_{glea} g^{af} - (K_a^a)^2 + K_b^a K_a^b \\ &= h^{ge} h_f^l R_{glea} (h^{af} - n^a n^f) - (K_a^a)^2 + K_b^a K_a^b \\ &= h^{ge} h_f^l R_{glea} h^{af} - (K_a^a)^2 + K_b^a K_a^b \\ &= h^{ge} h^{la} R_{glea} - (K_a^a)^2 + K_b^a K_a^b \\ &= 2 G_{ac} n^a n^c - (K_a^a)^2 + K_b^a K_a^b \end{aligned}$$

es decir

$$G_{ac}n^an^c = (1/2)[({}^3R + (K_a^a)^2 - K_b^aK_a^b)]$$

Por lo tanto la ecuación $G_{ac}n^an^c = 0$ se puede expresar como

$$(1/2)[({}^3R + (K_a^a)^2 - K_b^aK_a^b)] = 0$$

que tampoco tiene la forma de ecuación de evolución sino de limitante o “constraint” sobre los datos iniciales.

Estas son las ligaduras sobre los datos iniciales de la R.G.

1) Ligadura Hamiltoniana o “Hamiltonian Constraint”

$$(1/2)[({}^3R + (K_a^a)^2 - K_b^aK_a^b)] = 0$$

2) Ligadura de Momentum o “Momentum Constraint”

$$D_bK_a^b - D_bK_a^a = 0$$