

Curso de Relatividad General Avanzada

Semestre

Agosto-Diciembre 2007

Obligaciones y Calificaciones

- Hacer las todas tareas (sin excepción). Leer secciones correspondientes y estudiar todas las demostraciones, llenando los detalles como en clase. En los exámenes puedo preguntar sobre eso. Dedicación esperada 10 hs. semanales aparte de las horas de clase.
- Preparar trabajo final
- Nota:
 - 30% tareas
 - 40% exámenes
 - 30% trabajo final

Preliminares

Bases de conjuntos: Ej $A=B$ sii $A \subset B$ y $B \subset A$, sea sii $\forall q \in A \Rightarrow q \in B$ y $\forall q \in B \Rightarrow q \in A$

Bases de topología (Apendice A de Wald)

Espacios topológicos (X, τ) , abiertos y cerrados, espacios Hausdorff, convergencia, espacios métricos y espacios completos.

Compactidad, Primero contable (“base local” contable: para todo p existe conjunto contable de abiertos tal que dado un entorno de p , este contiene al menos uno de la colección), Segundo contable (base global contable).

Paracompactidad (todo recubrimiento de X tiene un sub-recubrimiento localmente finito (todo punto está en un abierto que intersecta número finito de elementos del recubrimiento...)

Preliminares

Bases de conjuntos: Ej $A=B$ sii $A \subset B$ y $B \subset A$, sea sii $\forall q \in A \Rightarrow q \in B$ y $\forall q \in B \Rightarrow q \in A$

Bases de topología (Apendice A de Wald)

Espacios topológicos (X, τ) , abiertos y cerrados, espacios Hausdorff, convergencia y espacios completos. Compactidad, Primero contable (base local contable), Segundo contable (base global contable).

Paracompacticidad (todo recubrimiento de X tiene un sub-recubrimiento localmente finito (todo punto está en un abierto que intersecta número finito de elementos del recubrimiento...))

Relatividad General: Deben conocer el material de los capítulos 1 a 6 de Wald.

Un espacio-tiempo (M, g) es una variedad diferencial (es abierta) con una métrica Lorentziana suave definida sobre M (i.e. en todo punto!).

Vectores, tensores, campos vectoriales tensoriales, formas. Notación de índices abstractos. Operadores derivada ∇_a . Torsión(asumiremos como 0), Diferencia entre dos operadores de derivada, Los C_{ab}^c . Operadores derivada asociados a una carta ∂_a .

Operador derivada compatible con la métrica. Los símbolos de Christoffel Γ_{ab}^c .

Derivadas de Lie. Tensor de Riemann. Identidad de Bianchi Ecuación de desviación geodésica. Ecuaciones de Einstein. Cosmología FRW. Espacio de Rindler, Solución de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal.

Estructura causal (Cap 8 Wald)

- Dado un espacio-tiempo (M, g) y un punto p en M notamos $T_p(M)$ el espacio tangente a M en p .
- El cono de luz en p es el conjunto de vectores nulos y temporales en $T_p(M)$.
- Def: Un espacio-tiempo es *temporalmente orientable* si existe una selección de una mitad del cono de Luz para todo p en M , que sea continua en M .
- Def: Un espacio-tiempo es *orientable* si existe una selección de una 4-forma (elemento de volumen) no nula para todo p en M , que sea continua en M . (No confundir)
- Caracterización de espacio-tiempos temporalmente orientables:

Estructura causal (Cap 8 Wald)

- Dado un espacio-tiempo (M, g) y un punto p en M notamos $T_p(M)$ el espacio tangente a M en p .
- El cono de luz en p es el conjunto de vectores nulos y temporales en $T_p(M)$.
- Def: Un espacio-tiempo es *temporalmente orientable* si existe una selección de una mitad del cono de Luz para todo p en M , que sea continua en M .
- Def: Un espacio-tiempo es *orientable* si existe una selección de una 4-forma (elemento de volumen) no nula para todo p en M , que sea continua en M . (No confundir)
- Caracterización de espacio-tiempos temporalmente orientables:

Lema (8.1.1): (M, g) es temporalmente orientable si existe V un campo vectorial temporal (no nulo) suave en M . (No es único)

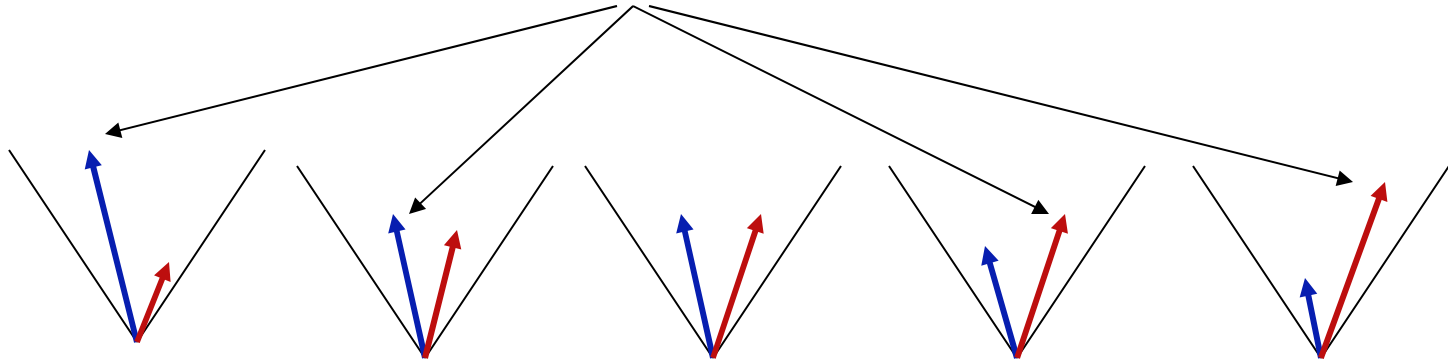
Dem:

(\leftarrow) Si existe V podemos usarlo para seleccionar en todo punto la mitad futura de $T_p(M)$ como aquella en que se encuentra $V(p)$, claramente la selección será suave.

(\rightarrow) Si (M, g) es orientable, escogemos una métrica Riemanniana k (no Lorentziana) en M . Esta siempre existe pues M es paracompacto (las variedades consideradas en RG). Def $A_p(M) = \{v \in T_p(M) / k_{ab} v^a v^b = 1\}$.

Sea $v(p)$ el vector temporal futuro que minimiza $f(v) = k_{ab}v^av^b$ en $A_p(M)$.

Si éste es único, es claro de que definirá un campo vectorial suave (pues toda la estructura que lo define es suave). Si no es único, entonces podría pasar lo siguiente: (Wald no considera este punto).



No hay elección continua

- Tarea 1 a): demostrar que en cada p el $v(p)$ arriba definido es único.
- Ejemplo Un espacio-tiempo que no es temporalmente orientable:
. Sección de Minkowski 2 d, “twisted”.
- Asumiremos de acá en más que nuestros espacio-tiempos son temporalmente orientables y lo que es más, que dicha selección se ha hecho por lo que son temporalmente orientados.

- **Def:** Una curva diferenciable $\lambda(t)$ se dirá temporal dirigida al futuro (**f.d.t.c.**: “future directed timelike curve”), si su tangente en cada punto es temporal y dirigida al futuro. Análogamente cambiando futuro por pasado def. **p.d.t.c.**
- **Def:** Una curva diferenciable $\lambda(t)$ se dirá causal dirigida al futuro (**f.d.c.c.**: “future directed causal curve”), si su tangente en cada punto es temporal o nula y dirigida al futuro. An-alogamente cambiando futuro por pasado def. **p.d.t.c.**
- **Def:** para cada $p \in M$ definimos **el futuro cronológico de p**

$$I^+(p) = \{q \in M \mid \exists \text{ f.d.t.c } \lambda(t) ; \lambda(0) = p , \lambda(t) = q\}$$
Def: para cada $p \in M$ definimos **el futuro causal de p**

$$J^+(p) = \{q \in M \mid \exists \text{ f.d.c.c } \lambda(t) ; \lambda(0) = p , \lambda(t) = q\}$$
Definimos $I^-(p)$, $J^-(p)$ de manera análoga reemplazando futuro por pasado.

- **Def:** Una curva diferenciable $\lambda(t)$ se dirá temporal dirigida al futuro (**f.d.t.c.**: “future directed timelike curve”), si su tangente en cada punto es temporal y dirigida al futuro. Análogamente cambiando futuro por pasado def. **p.d.t.c.**
- **Def:** Una curva diferenciable $\lambda(t)$ se dirá causal dirigida al futuro (**f.d.c.c.**: “future directed causal curve”), si su tangente en cada punto es temporal o nula y dirigida al futuro. Análogamente cambiando futuro por pasado def. **p.d.t.c.**
- **Def:** para cada $p \in M$ definimos el futuro cronológico de p

$$I^+(p) = \{q \in M \mid \exists \text{ f.d.t.c } \lambda(t) ; \lambda(0) = p , \lambda(t) = q\}$$
- **Def:** para cada $p \in M$ definimos el futuro causal de p

$$J^+(p) = \{q \in M \mid \exists \text{ f.d.c.c } \lambda(t) ; \lambda(0) = p , \lambda(t) = q\}$$

Definimos $I^-(p)$, $J^-(p)$ de manera análoga reemplazando futuro por pasado.

Claramente $I^+(p) \subset J^+(p)$. Se puede mostrar que $I^+(p)$ es siempre abierto, pero $J^+(p)$ no es siempre cerrado. En Minkowski la frontera $\partial I^+(p)$ (**Wald usa un punto, pero acá no se ve bien**) de $I^+(p)$ es $J^+(p) - I^+(p)$, pero en general esto es falso (**ej: Tomar (M, g) Minkowski menos un punto**).

Def: Un **entorno normal convexo** de p en M es un entorno abierto U de p tal que para todo par q, r en U existe una única geodésica de r a q contenida en U .

Lema 8.1.2. a:

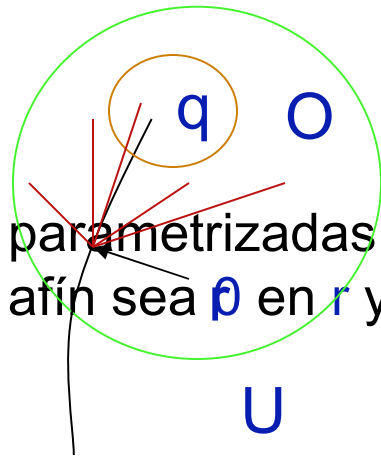
En todo espacio-tiempo (M, g) y todo p en M , existe un entorno normal convexo de p .

- **Lema:** Dado (M, g) un espacio-tiempo y $p \in M \Rightarrow I^+(p)$ es abierto.
- Dem: Sea $q \in I^+(p) \Rightarrow \exists$ f.d.t.c $\lambda(t)$ de p a q . Sea U un entorno normal convexo de q .



Sea $r \in U \cap \text{Imagen}(\lambda)$ y consideremos las geodésicas de r a cada $m \in U$ de modo que el parámetro

- **Lema:** Dado (M, g) un espacio-tiempo y $p \in M \Rightarrow I^+(p)$ es abierto.
- Dem: Sea $q \in I^+(p) \Rightarrow \exists$ f.d.t.c $\lambda(t)$ de p a q . Sea U un entorno normal convexo de q .



Sea $r \in U \cap \text{Imagen}(\lambda)$ y consideremos las geodésicas de r a cada $m \in U$ de modo que el parámetro

parametrizadas afín sea p en r y 1 en m .

Sea $F(m)$ la norma de la tangente en r a la geodésica de r a m . $F(q) < 0$ (puesto que la geodésica de r a q es temporal). Como F es continua, \exists O entorno (contenido en U) de q en el que $F < 0$.

$\forall n \in O$, la concatenación del segmento de p a r de λ con la geodésica temporal de r a n se puede deformar para obtener una f.d.t.c de p a n .

Entonces $\forall n \in O, n \in I^+(p)$. O sea que dado $q \in I^+(p)$ hemos encontrado un O entorno de $q / O \subset I^+(p)$: Es decir $I^+(p)$ es abierto. \blacklozenge

Lema 8.1.2. B:

Dado $p \in M$ y U un entorno normal convexo de p , se tiene que:

$I^+(p) \cap U = \{ q \in M / \exists \lambda(t) \text{ fdcc de } p \text{ a } q \text{ que es geodésica, \& Imagen}(\lambda) \subset U \}$

análogamente

$\partial I^+(p) \cap U = \{ q \in M / \exists \lambda(t) \text{ de } p \text{ a } q \text{ que es geodésica nula dirigida al futuro, \& Imagen}(\lambda) \subset U \}$

Corolario 8.1.2.c:

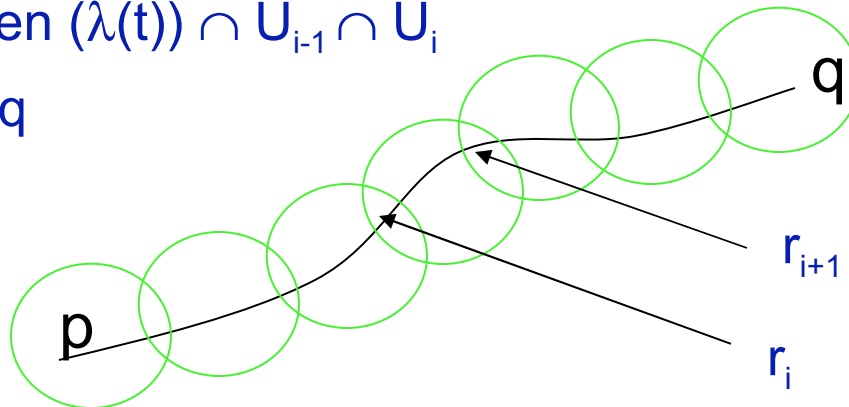
Si $q \in J^+(p) - I^+(p)$ toda curva causal de p a q es una geodésica nula.

Dem: Sea $q \in J^+(p) - I^+(p)$ y $\lambda(t)$ fdcc de p a q . Supongamos que $\lambda(t)$ no es una geodésica nula. Cubrimos la imagen de $\lambda(t)$ por entornos normales convexos. $\text{Imagen}(\lambda(t))$ es compacto (imagen continua de un compacto)

Entonces existe un sub-recubrimiento finito $\{ U_i, i = 1..N \}$. Para todo i , sea r_i

tal que $r_i \in \text{Imagen}(\lambda(t)) \cap U_{i-1} \cap U_i$

con $r_0 = p$ y $r_N = q$

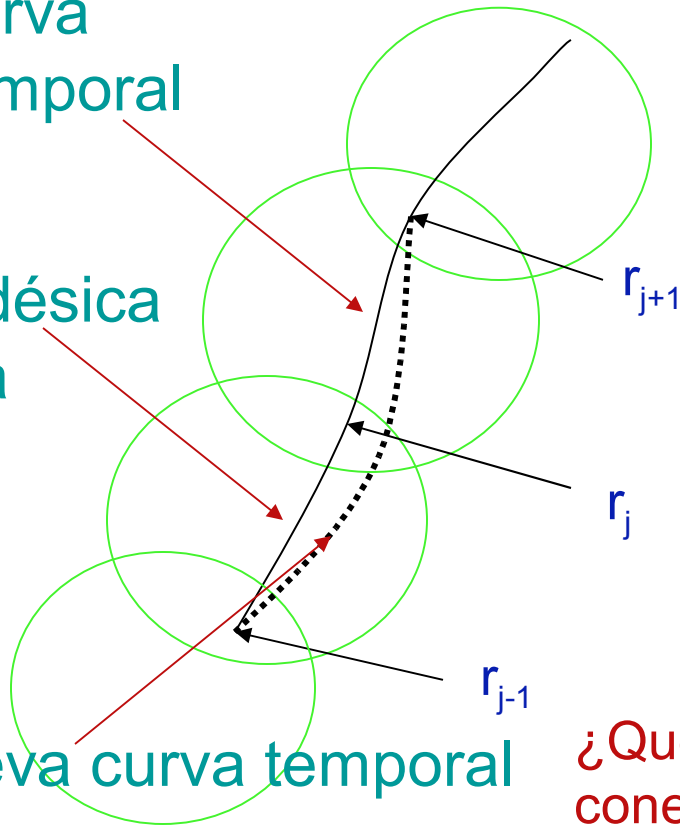


Sea j el menor número para el cual el segmento de $\lambda(t)$ de r_j a r_{j+1} no es una geodésica nula. Claramente $r_{j+1} \in J^+(r_j)$, pero al no ser conectados por una geodésica nula y estar en un entorno normal convexo, tendremos $r_{j+1} \in I^+(r_j)$. Entonces reemplazamos ese segmento de $\lambda(t)$ por la **fdtc** que es geodésica. Esta no es nula, entonces es temporal. Pero $r_j \in I^-(r_{j+1})$ que es abierto, \Rightarrow

curva temporal

geodésica nula

Nueva curva temporal



$\exists O$ entorno de r_j , $O \subset I^-(r_{j+1})$. Por otro lado $r_j \in \partial I^+(r_{j-1})$ (por estar conectado con r_{j-1} por una geodésica nula) \Rightarrow todo entorno de r_j intersecta $I^+(r_{j-1})$. Sea $s \in O \cap I^+(r_{j-1}) \Rightarrow$ tenemos **fdtc** de r_{j-1} a s y de s a r_{j+1} . La deformamos en **fdtc** de r_{j-1} a r_{j+1} . De esta manera se deforma toda la curva generando una **fdtc** de p a q por lo que concluimos que $q \in I^+(p)$.

Contradicción. \blacklozenge

¿Qué ocurre en Minkowski con dos puntos que conectamos con una curva nula no geodésica?

Def: dado S subconjunto de M definimos

$$I^+(S) = \cup_{p \in S} I^+(p) ; J^+(S) = \cup_{p \in S} J^+(p) .$$

Es claro que si $A \subset B$ entonces $I^+(A) \subset I^+(B)$ y $J^+(A) \subset J^+(B)$.

- Algunas propiedades: a) $I^+(I^+(S)) = I^+(S)$, b) $I^+(S) = \overline{I^+(S)}$.

Def: dado S subconjunto de M definimos

$$I^+(S) = \cup_{p \in S} I^+(p) ; J^+(S) = \cup_{p \in S} J^+(p) .$$

Es claro que si $A \subset B$ entonces $I^+(A) \subset I^+(B)$ y $J^+(A) \subset J^+(B)$.

- Algunas propiedades: a) $I^+(I^+(S)) = I^+(S)$, b) $I^+(\overline{S}) = \overline{I^+(S)}$.

Dem a) Si $q \in I^+(S) \Rightarrow \exists p \in S$ y $\lambda(t)$ **fdtc** de p a q . Def $r = \lambda(1/2) \Rightarrow r \in I^+(p) \subset I^+(S)$ y $q \in I^+(r)$, pero $I^+(r) \subset I^+(I^+(S)) \Rightarrow q \in I^+(I^+(S))$.

Por otro lado, si $q \in I^+(I^+(S)) \Rightarrow \exists m \in I^+(S)$ y $\lambda^1(t)$ **fdtc** de m a q .

Como $m \in I^+(S) \Rightarrow \exists n \in S$ y $\lambda^2(t)$ **fdtc** de n a m .

La concatenación las curvas $\lambda^2(t)$ y $\lambda^1(t)$ da (se puede suavizar para dar) una **fdtc** de n a q , $\Rightarrow q \in I^+(S)$ puesto que $n \in S$. ♦

Def: dado S subconjunto de M definimos

$$I^+(S) = \cup_{p \in S} I^+(p) ; J^+(S) = \cup_{p \in S} J^+(p) .$$

Es claro que si $A \subset B$ entonces $I^+(A) \subset I^+(B)$ y $J^+(A) \subset J^+(B)$.

- Algunas propiedades: a) $I^+(I^+(S)) = I^+(S)$, b) $I^+(\overline{S}) = \overline{I^+(S)}$.

Dem a) Si $q \in I^+(S) \Rightarrow \exists p \in S$ y $\lambda(t)$ **fdtc** de p a q . Def $r = \lambda(1/2) \Rightarrow r \in I^+(p) \subset I^+(S)$ y $q \in I^+(r)$, pero $I^+(r) \subset I^+(I^+(S)) \Rightarrow q \in I^+(I^+(S))$.

Por otro lado, si $q \in I^+(I^+(S)) \Rightarrow \exists m \in I^+(S)$ y $\lambda^1(t)$ **fdtc** de m a q .

Como $m \in I^+(S) \Rightarrow \exists n \in S$ y $\lambda^2(t)$ **fdtc** de n a m .

La concatenación las curvas $\lambda^2(t)$ y $\lambda^1(t)$ da (se puede suavizar para dar) una **fdtc** de n a q , $\Rightarrow q \in I^+(S)$ puesto que $n \in S$. \blacklozenge

b) Como $S \subset \overline{S} \Rightarrow I^+(S) \subset I^+(\overline{S})$. Sea $q \in I^+(\overline{S})$, $\Rightarrow \exists p \in S$ y $\lambda(t)$ **fdtc** de p a $q \Rightarrow \lambda(t)^{(-1)}$ es **pdtc** de q a $p \Rightarrow p \in I^-(q)$, pero $I^-(q)$ es abierto $\Rightarrow \exists U$ entorno (abierto) de p : $U \subset I^-(q)$, pero todo entorno abierto de p intersecta S pues $p \in \overline{S}$ (def de clausura de S) $\Rightarrow \exists n \in U \cap S \subset I^-(q) \Rightarrow q \in I^+(n)$, pero como $n \in S \Rightarrow q \in I^+(S)$. \blacklozenge

Tarea 1b Problema 2 Cap 8.

Ejercicio i) De un ejemplo de un espacio-tiempo (temporalmente orientado) (M, g) tal que para todo p en M , $I^+(p) = M$.

ii) Existe algún espacio-tiempo (M, g) tal que contenga un único p con la propiedad $I^+(p) = M$?

Tarea 1c Demostrar lo que haga falta en el ultimo párrafo de la pagina 191 de Wald.

Tarea 1d Demostrar que si una **fdtc** va de p a q y otra va de q a r , la concatenación se puede deformar para producir una **fdtc** de p a r (**Pista**: Construir un entorno normal convexo de q y poner coordenadas normales de Riemman, hacer el análisis como si fuera Minkowski y mantener las correcciones acotadas.)