

MECÁNICA CLÁSICA TAREA # 10

6 de noviembre de 2007

1.- Demuestre que entre los paréntesis de Poisson y los de Lagrange existe la relación de inversión

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} [u_\alpha, u_\beta] \{u_\alpha, u_\gamma\} = \delta_{\beta\gamma},$$

donde $u_\alpha = u_\alpha(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, $\alpha = 1, \dots, 2n$ y (q, p) es un sistema canónico de coordenadas.

2.- Encuentre las componentes de un campo vectorial hamiltoniano en coordenadas generales (x^1, \dots, x^{2n}) , no necesariamente canónicas, en la base natural

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{2n}} \right).$$

3.- Demuestre por tres vías distintas que las transformaciones

$$\begin{aligned} q^1 &= \frac{\sqrt{2P_1} \operatorname{sen} Q^1 + P_2}{\sqrt{m\omega}} \\ q^2 &= \frac{\sqrt{2P_1} \operatorname{cos} Q^1 + Q^2}{\sqrt{m\omega}} \\ p_1 &= \frac{\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1} \operatorname{cos} Q^1 - Q^2)}{2} \\ p_2 &= \frac{\sqrt{m\omega}(-\sqrt{2P_1} \operatorname{sen} Q^1 + P_2)}{2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q^1 &= Q^1 \operatorname{cos} \lambda + \frac{P_2 \operatorname{sen} \lambda}{m\omega} \\ q^2 &= Q^2 \operatorname{cos} \lambda + \frac{P_1 \operatorname{sen} \lambda}{m\omega} \\ p_1 &= -m\omega Q^2 \operatorname{sen} \lambda + P_1 \operatorname{cos} \lambda \\ p_2 &= -m\omega Q^1 \operatorname{sen} \lambda + P_2 \operatorname{cos} \lambda, \end{aligned}$$

son canónicas. Encuentre las funciones generadoras de estas transformaciones.

4.- Considere la función $F(q, p) = pq - \frac{1}{2m} p^2 t$ encuentre todas las transformaciones canónicas generadas por esta función.

5.-Tomemos un sistema hamiltoniano con hamiltoniana H . Denotemos por q_0^i y p_{0i} a un sistema canónico de coordenadas para el espacio fase. Demuestre que, para cualquier valor T del tiempo, la transformación de coordenadas dada por

$$Q^i = q^i(q_0, p_0, T)$$

$$P_i = p_i(q_0, p_0, T),$$

donde $q^i(q_0, p_0, t)$, $p_i(q_0, p_0, t)$ es la trayectoria del sistema para condiciones iniciales (q_0, p_0) , es canónica.